KÖRPER GRÖSSTER ANZIEHUNG AUF EIN UND ZWEI ELLIPSOIDE VON n DIMENSIONEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

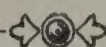
VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT VON

KARL BECKER

AUS ELLRICH (AM HARZ).



HALLE a. S.

HOFBUCHDRUCKEREI VON C. A. KAEMMERER & CO.

1910.

Referent: Prof. Dr. **A. Gutzmer.**

Meinen lieben Eltern.

Inhalt.

Einleitung.

§ 1. Lösungsmethoden.

Mit dem Problem der „Körper grösster Anziehung“ haben sich die Mathematiker vielfach beschäftigt. Als Lösungsmethode benutzten die meisten wie Boscowich, Saint Jacques, Playfair, neuerdings Spijker, Wangerin den Satz: Ein Körper übt maximale Anziehung in gegebenen Richtungen auf gegebene Körper aus, wenn für seine Begrenzungspunkte die Summe der Anziehungskomponenten in den gegebenen Richtungen konstant ist.[1]) Auch ich benutze diesen Satz zur Lösung, werde aber in den meisten Fällen durch besondere rein analytische Behandlung mit Hilfe der Variationsrechnung die Richtigkeit der Resultate nachzuweisen versuchen.

Als Anziehungsgesetz ist zu Grunde gelegt das Newtonsche: zwei Massen m und m′ im Abstand r im R_n ziehen sich an mit einer Kraft $K = \mu \frac{m \cdot m'}{r^{n-1}}$.

1) Beweis siehe: Spijker, Diss. Zürich 1904, § 2 oder Wangerin: Potentialtheorie I. S. 129.

I. Teil.

Körper grösster Anziehung auf ein Ellipsoid von n Dimensionen (ein E_n).

Kapitel I. Lösung des Problems:

Gegeben ein homogenes Ellipsoid E_n und eine homogene Masse. Welche Gestalt und Lage muss die Masse haben, damit sie auf das Ellipsoid in gegebener Richtung die grösste Anziehung ausübt?

§ 2. Berechnung der Anziehungskomponenten des E_n.

Für die Ellipse E_2 und das Ellipsoid E_3 ist dies Problem schon behandelt von Spijker.[1]) Um das Problem auf den R_n auszudehnen, gilt es, vorher die Anziehungskomponenten eines E_n im R_n nach unserm Gesetz zu bestimmen. In der Ableitung dieser Formel folge ich Chasles.[2])

1. Newtonscher Satz für den R_n: Im R_n übt eine von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden E_n begrenzte „Schale" auf einen innern Punkt keine Anziehung aus.

Beweis: Als Ellipsoid E_n definieren wir ein Gebilde des R_n mit der Gleichung

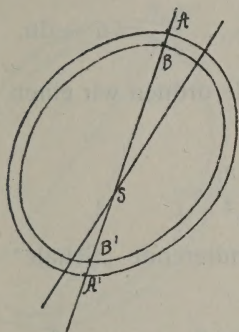
$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}+\dots\frac{x_n^2}{a_n^2}=1,\quad a_1>a_2\dots>a_n.$$

---

1) Siehe: Spijker, Diss. Zürich 1904.

2) Vgl. Klass. d. exakt. Wissenschaften. Band 19.

Die „Schale“ sei zunächst unendlich dünn. S ein Punkt im Innern sei Scheitel eines Kegels Ke_n mit unendlich kleinem Öffnungswinkel, der aus der „Schale“ bei A und A′ zwei Volumenelemente v und v′ ausschneidet, die man bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als Differenz zweier Kreiskegel ansehen kann; also



$$Ke_n = \frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}^{1)}}{n} = \frac{\overline{SA}^{n-1} \cdot \sigma}{n} \cdot \overline{SA},$$

wo σ das Flächenstück ist, das der Kegel aus der Einheitskugel K_n ausschneidet.

$$v = \frac{\sigma}{n}(\overline{SA}^n - \overline{SB}^n) = \sigma \cdot \overline{AB} \cdot SA^{n-1}; \quad v' = \sigma \cdot \overline{A'B'} \cdot \overline{SA'}^{n-1},$$

und da $AB = A'B'$ ist, $\frac{v}{\overline{SA}^{n-1}} = \frac{v'}{\overline{SA'}^{n-1}}$.

Nun ist $\frac{v}{\overline{SA}^{n-1}}$ die Anziehung von v auf S. Auf S wirken also zwei gleiche aber entgegengesetzt wirkende Kräfte, die sich aufheben. Da A und B ganz beliebig waren, gilt das für jeden Punkt. Die „Schale“ übt keine Anziehung auf S aus.

2. Verallgemeinerung des Ivoryschen Satzes: Gegeben sind zwei konfokale Ellipsoide E_n, auf der Oberfläche des ersten die Punkte A und B, auf der Oberfläche des zweiten die korrespondierenden Punkte A′ und B′. Dann ist $\overline{AB'} = \overline{A'B}$. Der Beweis ist ganz analog dem für 3 Dimensionen.

3. Verallgemeinerung des Maclaurinschen Satzes: Die Anziehungen von zwei unendlich dünnen korrespondierenden „Schalen“ verhalten sich wie die Massen der „Schalen“.

---

1) Vgl. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie. S. 112.

Beweis: Zwei ähnliche und ähnlich liegende E_n, die eine unendlich dünne „Schale“ begrenzen, seien bestimmt durch

$$\mathfrak{A} \equiv \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots \frac{x_n^2}{a_n^2} = u; \quad \mathfrak{A}' \equiv \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots \frac{x_n^2}{a_n^2} = u - du.$$

Jeden Punkt $P(x_1 \dots x_n)$ dieser Schale ordnen wir einen Punkt $P'(x_1' \dots x_n')$ zu, so dass

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \lambda}} \dots \frac{x_n}{x_n'} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + \lambda}}.$$

Diese Punkte bilden die korrespondierende „Schale“ $(\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}')$ mit den Begrenzungen

$$\mathfrak{B} \equiv \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \dots \frac{x_n^2}{a_n^2 + \lambda} = u;$$

$$\mathfrak{B}' \equiv \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \dots \frac{x_n^2}{a_n^2 + \lambda} = u - du.$$

Dann beweist man analog dem Beweis für 3 Dimensionen, dass die Anziehungen dieser „Schalen“ auf einen äussern Punkt sich verhalten wie die Massen; speziell, dass die Anziehung von $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}')$ auf einen Punkt P' auf $\mathfrak{B}$ gleich ist der Anziehung von $(\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}')$ auf P' mal

$$\frac{a_1\, a_2 \dots a_n}{\sqrt{(a_1^2 + \lambda) \dots (a_n^2 + \lambda)}},$$

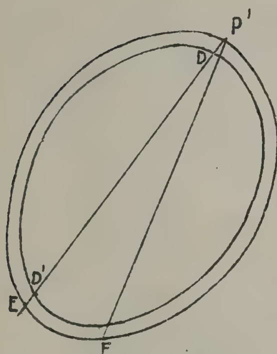
wo λ bestimmt ist als grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \dots \frac{x_n^2}{a_n^2 + \lambda} = u$$

und $x_1 \dots x_n$ Koordinaten von P' sind.

4. Bestimmung der Anziehung auf einen Punkt der Begrenzung. Unser Problem ist damit zurückgeführt auf die Berechnung der Anziehung einer dünnen „Schale“ auf einen Punkt P' der äussern Begrenzung $(\mathfrak{B})$. P' sei der Scheitel eines Kegels Ke_n mit kleinem Öffnungswinkel, der aus der Schale ein gewisses Volumen ausschneidet. Dieses

teile ich in Elementarschichten vom Volumen $\sigma r^{n-1} dr$. Anziehung eines solchen Teilchens auf P′ ist (ϱ = Dichte)



$$\varrho \sigma r^{n-1} dr \frac{\mu}{r^{n-1}} = \varrho \mu \sigma dr,$$

also von der ganzen Masse im Kegel

$$\mu \varrho \sigma (P'D + ED') = 2 \mu \varrho \sigma \frac{dn}{\cos DP'F}.$$

Da nur die Komponente längs der Normalen wirkt, bleibt

$$2 \mu \varrho \sigma dn.$$

Um die Anziehung der ganzen „Schale“ zu bekommen, ist σ zu integrieren über eine Halbkugel K_n, also ist

$$A = \frac{n}{2} \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} 2 \mu \varrho dn.$$

Das dn bestimmt sich leicht:

$$dn = - \frac{du}{2\sqrt{\frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda)^2} + \dots \frac{x_n^2}{(a_n^2+\lambda)^2}}}$$

Um endlich die Komponenten der Anziehung in Richtung der Achsen zu bekommen, ist noch mit

$$\cos \alpha_\nu = \frac{\frac{x_\nu}{a_\nu^2+\lambda}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda)^2} + \dots \frac{x_n^2}{(a_n^2+\lambda)^2}}}$$

zu multiplizieren. Da endlich

$$du = \frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda)^2} + \dots \frac{x_n^2}{(a_n^2+\lambda)^2}$$

ist, so erhält man schliesslich als Anziehungskomponenten der „Schale“ $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ auf P′:

$$(x_1) = 2 \frac{\mu \varrho}{2} \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{x_1}{a_1^2+\lambda} d\lambda; \text{ analog } (x_2), \dots (x_n).$$

5. Anziehungskomponenten des Ellipsoids E_n.

Die Anziehungskomponenten von $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}')$ auf P' sind

$$X_1 = \frac{a_1 \ldots a_n \cdot x_1 \; d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)\sqrt{(a_1^2 + \lambda) \ldots (a_n^2 + \lambda)}} \cdot \mu \cdot \varrho \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Teilt man nun das Ellipsoid E_n

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

durch ein System von Ellipsoiden

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n^2} = u$$

in solche Schalen, so erhält man durch Integration, da u von 0 bis 1, also λ von einem durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n^2 + \lambda} = 1 \text{ bestimmten } \lambda \text{ bis } \infty \text{ variiert:}$$

$$Y_1 = a_1 \, a_2 \ldots a_n \, \mu \cdot \varrho \, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x_1 \times$$

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)\sqrt{(a_1^2 + \lambda) \ldots (a_n^2 + \lambda)}} = C \cdot Z_1^{(\lambda)} \cdot x_1;$$

analog $Y_2, \ldots Y_n$.

Auf ganz anderm, nämlich rein analytischem Wege mit Hilfe der Greenschen Formeln findet Cayley für das Potential der Anziehung eines Ellipsoids

$$V_1 = a_1 \ldots a_n \frac{\mu\,\varrho}{2} \frac{\left[\Gamma\,\frac{1}{2}\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2 + \lambda) \ldots (a_n^2 + \lambda)}} \times$$

$$\left[1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} - \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2 + \lambda}\right],$$

woraus sich durch Differentiation die Richtigkeit obiger Formeln ergibt.

Zur Vereinfachung setzen wir den konstanten Faktor

$$C = a_1 a_2 \ldots a_n \mu \varrho \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^n}{\Gamma \frac{n}{2}} = 1;$$

das Integral $\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)\sqrt{(a_1^2 + \lambda) \ldots (a_n^2 + \lambda)}} = Z_1^{(\lambda)}$

und entsprechend die andern.

§ 3. Lösung des Problems und Diskussion des Resultats.

Die Anziehungskomponente in der Richtung $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ eines Punktes $P(x_1 \ldots x_n)$ auf ein Ellipsoid $E_n(a_1 \ldots a_n)$ ist

(I.) $$A = \alpha_1 x_1 Z_1^{(\lambda)} + \alpha_2 x_2 Z_2^{(\lambda)} + \ldots \alpha_n x_n Z_n^{(\lambda)},$$

wo λ grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \ldots \frac{x_n^2}{a_n^2 + \lambda} = 1 \text{ ist.}$$

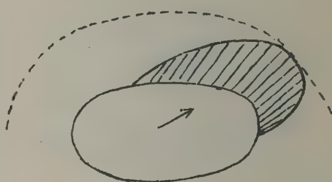
Nach § 1 ist für Punkte der Begrenzung des Körpers grösster Anziehung in der gegebenen Richtung $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ das A konstant. Also stellt (I.) für variable $x_1 \ldots x_n$ die Begrenzung des Körpers grösster Anziehung in Richtung $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ dar.

Die Konstante A hängt von der Grösse der gegebenen Masse ab. Wächst die Masse, so wird A, die Anziehung der Begrenzungspunkte, kleiner, für die Masse $M = 0$ ist A ein Maximum, für $M = \infty$ wird $A = 0$.

Gibt man λ einen bestimmten Wert, so stellt (I.) einen ebenen R_{n-1} im R_n dar, der jedes Ellipsoid E_n in einem E_{n-1} schneidet. Die Begrenzung des Körpers grösster Anziehung schneidet jedes konfokale Ellipsoid in einem E_{n-1}; und zwar nach dem Maclaurinschen Satze so, dass der äussere Teil für dieses Ellipsoid als Körper grösster Anziehung in Richtung $\vartheta\ (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ angesehen werden kann.

Ein bestimmtes Ellipsoid $\bar{\lambda}$ wird bei festem A den Körper grösster Anziehung berühren. Der Berührungspunkt

ist dann derjenige, der von allen Punkten des Ellipsoids $\bar{\lambda}$ in Richtung ϑ die grösste Anziehung erfährt. Da für dies $\bar{\lambda}$



$$A = \alpha_1 Z_1^{(\bar{\lambda})} X_1 + \ldots \alpha_n Z_n^{(\bar{\lambda})} X_n \text{ und}$$

$$\frac{x_1 X_1}{a_1^2 + \lambda} + \ldots \frac{x_n X_n}{a_n^2 + \lambda} = 1$$

identisch sind, so ergibt sich daraus als Bestimmungsgleichung für $\bar{\lambda}$

$$1) \quad A^2 = \alpha_1^2 (Z_1^{(\bar{\lambda})})^2 (a_1^2 + \lambda) + \alpha_2^2 (Z_2^{(\bar{\lambda})})^2 (a_2^2 + \lambda) + \ldots \alpha_n^2 (Z_n^{(\bar{\lambda})})^2 (a_n^2 + \lambda).$$

Dasselbe erhält man, wenn $U = \alpha_1 x_1 Z_1^{(\lambda)} + \ldots \alpha_n x_n Z_n^{(\lambda)}$ ein Maximum werden soll. Umgekehrt lässt sich aus 1) bei gegebenem λ das A bestimmen; speziell für $\lambda = 0$, also wenn das ursprüngliche Ellipsoid berührt, d. h. wenn der Körper grösster Anziehung zu einem Punkte zusammenschrumpft, also $M = 0$, so erhalten wir als Maximalwert von A

$$A_m = \sqrt{a_1^2 \alpha_1^2 (Z_1^{(0)})^2 + a_2^2 \alpha_2^2 (Z_2^{(0)})^2 + \ldots a_n^2 \alpha_n^2 (Z_n^{(0)})^2}.$$

Dieser Punkt hat die Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_1^2 \alpha_1 Z_1^{(0)}}{A_m}, \quad x_2 = \frac{a_2^2 \alpha_2 Z_2^{(0)}}{A_m} \ldots \quad x_n = \frac{a_n^2 \alpha_n Z_n^{(0)}}{A_m}.$$

Nach dem Maclaurinschen Satze kann man die Wirkung des Ellipsoids ersetzen durch ein konfokales mit derselben Masse. Ersetzen wir unser E_n durch das mit derselben Masse belegte Fokal-Ellipsoid E_{n-1} $\left(\sqrt{a_1^2 - a_n^2}, \sqrt{a_2^2 - a_n^2} \ldots \sqrt{(a_{n-1}^2 - a_n^2}\right)$, dann kann auch das A noch grössere Werte annehmen, nämlich bis

$$A_{max} = \sqrt{\alpha_1^2 (Z_1^{(-a_n^2)})^2 (a_1^2 - a_n^2) + \ldots \alpha_{n-1}^2 (Z_{n-1}^{(-a_n^2)})^2 (a_{n-1}^2 - a_n^2) + L},$$

wo:

$$L = \alpha_n^2 \lim_{\lambda = -a_n^2} (\sqrt{a_n^2 + \lambda}\ Z_n^{\lambda})^2 =$$

$$\alpha_n^2 \operatorname{Lim} \left(\frac{\dfrac{1}{(a_n^2 + \lambda)\sqrt{(a_1^2 + \lambda) \ldots (a_n^2 + \lambda)}}}{-\dfrac{1}{2\sqrt{a_n^2 + \lambda}}} \right)^2 =$$

$$\frac{4\,\alpha_n^2}{(a_1^2 - a_n^2) \ldots (a_{n-1}^2 - a_n^2)} \text{ ist.}$$

Dieser Wert für A kommt vor im Punkt

$$x_1 = \frac{\alpha_1 Z_1^{(-a_n^2)} (a_1^2 - a_n^2)}{A_{max}}; \ldots$$

$$x_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1} Z_{n-1}^{(-a_n^2)} (a_{n-1}^2 - a_n^2)}{A_{max}}; \; x_n = 0.$$

Schnitt mit der $x_1\, x_k$ Ebene. $x_\mu = 0$ $(\mu \neq 1; \neq k)$.

$$\alpha_1 Z_1^{(\lambda)} x_1 + \alpha_k Z_k^{(\lambda)} x_k = A; \quad \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_k^2}{a_k^2 + \lambda} = 1.$$

Für jeden Wert des Parameters λ ergibt das eine Gerade und eine Ellipse. Beide schneiden sich (bilden also Punkte unserer Schnittfigur) nur, wenn der Pol der Geraden in Bezug auf die Ellipse

$$\overline{x}_1 = \frac{(a_1^2 + \lambda)\, \alpha_1 Z_1^{(\lambda)}}{A} \cdot \quad \overline{x}_k = \frac{(a_k^2 + \lambda)\, \alpha_k Z_k^{(\lambda)}}{A}$$

ausserhalb der Ellipse liegt, also

$$\frac{\overline{x}_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{\overline{x}_k^2}{a_k^2 + \lambda} > 1.$$

$$(a_1^2 + \lambda)\, \alpha_1^2 (Z_1^{(\lambda)})^2 + (a_k^2 + \lambda)\, \alpha_k^2 (Z_k^{(\lambda)})^2 > A^2.$$

Soll es überhaupt reelle Schnittpunkte geben, so muss wenigstens für $\lambda = -a_n^2$ unsere Ungleichung erfüllt sein. Es muss

$A < \sqrt{(a_1^2 - a_n^2)\, \alpha_1^2 (Z_1^{(-a_n^2)})^2 + (a_k^2 - a_n^2)\, \alpha_k^2 (Z_k^{(-a_n^2)})^2}$ sein.

Ist $A = \sqrt{\ldots}$, so reduziert sich die Schnittkurve auf den Punkt

$$x_1 = \frac{(a_1^2 - a_n^2)\,\alpha_1 (Z_1^{(-a_n^2)2})}{A}, \quad x_k = \frac{(a_k^2 - a_n^2)\,\alpha_k (Z_k^{(-a_n^2)2})}{A}.$$

Schnitt mit der $x_1\,x_n$ Ebene. Das angezogene Ellipsoid ist durch das Fokalellipsoid E_{n-1} zu ersetzen. Die Kurve

$$x_1\,\alpha_1\,Z_1^{(\lambda)} + x_n\,\alpha_n\,Z_n^{(\lambda)} = A; \quad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{x_n^2}{a_n^2+\lambda} = 1$$

hat reelle Punkte, wenn

$$A < \sqrt{a_1^2\,\alpha_1\,Z_1^{(-a_n^2)2} + \alpha_n^2 \lim_{\lambda = -a_n^2} \left[(a_n^2+\lambda)\,Z_n^{(\lambda)2}\right]} =$$

$$\sqrt{a_1^2\,\alpha_1\,Z_1^{(-a_n^2)2} + \frac{4\,\alpha_n^2}{(a_1^2 - a_n^2)(a_2^2 - a_n^2)\ldots(a_{n-1}^2 - a_n^2)}}.$$

Ist $A = \sqrt{\ldots}$, so reduziert sich die Kurve auf den Punkt

$$x_1 = \frac{(a_1^2 - a_n^2)\,\alpha_1\,Z_1^{(-a_n^2)}}{A} \cdot x_n = 0.$$

Analoges bekommen wir als Schnitt mehrdimensionaler Achsenräume.

„Randkörper“ der Begrenzung. Als solchen bezeichnen wir den krummen R_{n-2}, indem sich die Begrenzung (krummer R_{n-1}) und das Fokalellipsoid E_{n-1} schneiden; er bildet die Endpunkte der Begrenzung.

Setzt man $\lambda = -a_n^2$, so folgt:

$$A = x_1\,\alpha_1\,Z_1^{(-a_n^2)} + \ldots x_{n-1}\,\alpha_{n-1}\,Z_{n-1}^{(-a_n^2)} +$$

$$\lim_{\lambda = -a_n^2} \left(\frac{x_n\,\alpha_n}{\sqrt{a_n^2+\lambda}}\, Z_n^{(\lambda)} \cdot \sqrt{a_n^2+\lambda} \right)$$

$$\lim Z_n^{(\lambda)} \sqrt{a_n^2+\lambda} = \frac{2}{\sqrt{(a_1^2 - a_n^2)(a_2^2 - a_n^2)\ldots(a_{n-1}^2 - a_n^2)}}$$

$$\lim \frac{x_n}{\sqrt{a_n^2+\lambda}} = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_n^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_n^2} \ldots - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1} - a_n^2}}$$

Gleichung des Randkörpers:

$$1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 - a_n^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2 - a_{n2}} \ldots - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 - a_n^2} =$$

$$(A - x_1\,\alpha_1\,Z_1^{(-a_n^2)} - \ldots x_{n-1}\,\alpha_{n-1}\,Z_{n-1}^{(-a_n^2)})^2 \times$$

$$\frac{(a_1^2 - a_n^2)\ldots(a_{n-1}^2 - a_n^2)}{4\,\alpha_n^2}.$$

Setzt man beide Seiten dieser Gleichung einzeln gleich Null, so erhält man einmal die Gleichung des Fokalellipsoids E_{n-1}; die andere Seite gleich Null gesetzt gibt die Gleichung eines (doppelt zu zählenden) ebenen R_{n-2}. Beide schneiden sich in einem krummen R_{n-3} und zwar einem E_{n-2}, indem sich Fokalellipsoid und Randkörper berühren. Dieses Schnittellipsoid wird zu einem Punkte, wenn

$$A - x_1 \alpha_1 Z_1^{(-a_n^2)} - \ldots x_{n-1} \alpha_{n-1} Z_{n-1}^{(-a_n^2)} = 0$$

das Fokalellipsoid berührt, oder

$$A^2 = \alpha_1^2 Z_1^{(-a_n^2)\,2} (a_1^2 - a_n^2) + \ldots$$
$$\alpha_{n-1}^2 Z_{n-1}^{(-a_n^2)\,2} (a_{n-1}^2 - a_n^2).$$

Für diesen Wert berühren sich Fokalellipsoid und Randkörper in n. ter Ordnung.

Kapitel II. Eigentlicher Körper grösster Anziehung.

§ 4. Gleichung der Begrenzung.

Bei gegebener Masse wird die Gesamtanziehung auf das Ellipsoid sich ändern mit der Richtung. Die Gesamtanziehung wird am grössten sein in der gegebenen Richtung, wenn diese Richtung mit der Richtung der resultierenden Gesamtanziehung zusammenfällt. Da nun die Anziehung auf ein Ellipsoid in Richtung der Achsen symmetrisch ist, so wird offenbar für diese Richtungen auch die Resultante der Anziehung in diese Richtungen fallen. Wir erhalten also für diese Richtungen n Extremwerte. Um das Maximum zu bestimmen, fragen wir, in welcher dieser n Richtungen ein Punkt maximal angezogen wird. Je nachdem dieser in den Endpunkten der Achsen liegt, erfährt er die Anziehungen bezw.

$a_1 Z_1^{(0)}$, $a_2 Z_2^{(0)}$, ... $a_n Z_n^{(0)}$ in Richtung der Achsen a_1, $a_2 \ldots a_n$. Es zeigt sich, dass von diesen Werten $a_n Z_n^{(0)}$ am grössten ist. Um dies nachzuweisen, bilden wir

$$a_n Z_n^{(0)} - a_\nu Z_\nu^{(0)} = a_n \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_n^2+\lambda)\sqrt{(a_1^2+\lambda)\dots(a_n^2+\lambda}} -$$

$$a_\nu \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_\nu^2+\lambda)\sqrt{(a_1^2+\lambda)\dots(a_n^2+\lambda)}} =$$

$$(a_\nu - a_n)\int_0^\infty \frac{(a_\nu a_n - \lambda)\ d\lambda}{\sqrt{(a_\nu^2+\lambda)^3}\sqrt{(a_n^2+\lambda)^3}\sqrt{(a_1^2+\lambda)\dots(a_{\nu-1}^2+\lambda)(a_{\nu+1}^2+\lambda)\dots(a_{n-1}^2+\lambda)}}$$

Integrieren wir partiell $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ und setzen

$$dv = \frac{a_\nu a_n - \lambda}{[\sqrt{(a_\nu^2+\lambda)\ (a_n^2+\lambda)}\,]^3}$$

$$v = \frac{2[\sqrt{a_\nu^2+\lambda}\sqrt{a_n^2+\lambda - a_\nu a_n - \lambda)}]}{\sqrt{a_\nu^2+\lambda}\sqrt{a_n^2+\lambda}\,[\sqrt{a_\nu^2+\lambda}+\sqrt{a_n^2+\lambda}\,]^2} \text{ also}$$

$$a_n Z_n^{(0)} - a_\nu Z_\nu^{(0)} = \frac{a_\nu - a_n}{2} \times$$

$$\int_0^\infty v\, d\lambda \Bigg[\frac{1}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)^3}\sqrt{(a_2^2+\lambda)\dots(a_{\nu-1}^2+\lambda)(a_{\nu+1}^2+\lambda)\dots a_{n-1}^2+\lambda}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a_2^2+\lambda)^3}\sqrt{(a_1^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)\dots(a_{\nu-1}^2+\lambda)(a_{\nu+1}^2+\lambda)\dots a_{n-1}^2+\lambda}} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a_{n-1}^2+\lambda)^3}\sqrt{(a_1^2+\lambda)\dots(a_{n-2}^2+\lambda)}}\Bigg].$$

Ein einzelnes Element des Integrals ist für λ zwischen 0 und ∞ immer positiv; also wird auch die Summe der Elemente, das ganze Integral positiv sein, d. h.

$$a_n Z_n^{(0)} - a_\nu Z_\nu^{(0)} > 0;\quad a_n Z_n^{(0)} > a_\nu Z_\nu^{(0)}.$$

Das gilt für jedes ν von 1 bis $n-1$, d. h. $a_n Z_n^{(0)}$ ist der grösste Wert. Diese Ableitung gilt aber nur für $n > 2$. Für $n = 2$ ist

$$a_2 Z_2^{(0)} - a_1 Z_1^{(0)} = (a_1 - a_2)\int_0^\infty \frac{a_1 a_2 - \lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)^3}\sqrt{(a_2^2+\lambda)^3}}\, d\lambda =$$

$$\left[(a_1 - a_2)\,v\right]_0^\infty = 0; \text{ hier ist } a_2\,Z_2{}^0 = a_1\,Z_1{}^0.$$

Hier ist die Anziehung gleich, ob der Punkt im Endpunkt der grossen oder kleinen Achse liegt. Das ist der Grund des von Spijker als so eigentümlich gefundenen Resultates. Wir haben allgemein: Ein materieller Punkt wird von einem Ellipsoid E_n $(n > 2)$ am stärksten angezogen, wenn er sich in einem der beiden Endpunkte der kleinsten Achse befindet. Umgekehrt wird dieser Punkt auch die grösste Anziehung auf das Ellipsoid ausüben. Aus dem vorigen geht hervor, dass in Richtung der kleinsten Achse eine gegebene Masse die absolut grösste Anziehung auf das Ellipsoid ausübt. Die Gleichung der Begrenzung des eigentlichen Körpers grösster Anziehung ist also nunmehr

$$A = Z_n{}^{(\lambda)}\,x_n; \quad \frac{x_1{}^2}{a_1{}^2 + \lambda} + \frac{x_2{}^2}{a_2{}^2 + \lambda} \cdots \frac{x_n{}^2}{a_n{}^2 + \lambda} = 1.$$

§ 5. Diskussion der Gleichung.

Man erkennt sofort, dass die Begrenzung symmetrisch zu allen Achsen ausser der x_n-Achse ist; ebenso sind alle $x_\nu\,x_n$-Ebenen Symmetrieebenen. Die Gleichungen der Projektionen auf die $x_\nu\,x_n$-Ebenen sind

$$\frac{x_\nu{}^2}{a_\nu{}^2 + \lambda} + \frac{x_n{}^2}{a_n{}^2 + \lambda} = 1; \quad A = Z_n{}^{(\lambda)}\,x_n.$$

Projektionen auf die $x_\nu\,x_\mu$-Ebene $(\nu \neq n \;\; \mu \neq n)$ sind die Ellipsen

$$\frac{x_\nu{}^2}{a_\nu{}^2 + \lambda} + \frac{x_\mu{}^2}{a_\mu{}^2 + \lambda} = 1 - \frac{A^2}{Z_n{}^{(\lambda)2}\,(a_n{}^2 + \lambda)}.$$

Das Berührungsellipsoid von Randkörper und Fokalellipsoid ist hier immer imaginär.

Kapitel III. Spezialfälle.

§ 6. Der Fall $n = 2$.

Dieses Problem ist von Spijker ausführlich behandelt worden. Ich möchte dazu nur einen interessanten Satz nachtragen, der von ihm übersehen ist.

Für den Fall $n = 2$ ist es nämlich möglich, Inhalt des Körpers und Gesamtanziehung auszurechnen.

$$A = Z_2^\lambda x = x \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt{b^2+\lambda}\,(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda})}, \text{ wo: } \frac{x}{b^2+\lambda} + \frac{y^2}{a^2+\lambda} = 1 \text{ ist.}$$

Setzt man $x = \sqrt{b^2+\lambda}\cos\varphi$, $y = \sqrt{a^2+\lambda}\sin\varphi$, dann ist

$$J = \int\int_{-\varphi}^{+\varphi} \frac{d\lambda\, d\varphi}{2\sqrt{a^2+\lambda}\,\sqrt{b^2+\lambda}}((b^2+\lambda)\sin^2\varphi + (a^2+\lambda)\cos^2\varphi)$$

$$= \int \frac{d\lambda}{2\sqrt{a^2+\lambda}\,\sqrt{b^2+\lambda}}[(b^2+\lambda)\,2\varphi + (a^2-b^2)(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)].$$

Nach λ ist zu integrieren von $\lambda = -b^2$ bis zu $\bar{\lambda}$, das bestimmt ist durch

$$A = \frac{1}{\sqrt{a^2+\bar{\lambda}} + \sqrt{b^2+\bar{\lambda}}}.$$

$$\text{Es ist } \frac{\cos\varphi}{A} = \sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda};$$

$$\frac{d\lambda}{2\sqrt{a^2+\lambda}\,\sqrt{b^2+\lambda}} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi;$$

setzt man diese Werte ein, so folgt:

$$J = \int -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi\left[\frac{\varphi}{2}\left\{\frac{\cos^2\varphi}{A^2} - 2(a^2-b^2) + \frac{(a^2-b^2)^2 A^2}{\cos^2\varphi}\right\} + (a^2-b^2)\varphi + (a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\right].$$

$$J = \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2 A^2} \varphi \, d\varphi + \frac{(a^2 - b^2)^2 A^2}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} \varphi \, d\varphi$$

$$+ (a^2 - b^2) \int_0^{\varphi_1} \sin^2\varphi \, d\varphi,$$

wo φ_1 bestimmt ist durch $\cos\varphi_1 = A\sqrt{a^2 - b^2}$.

$$J = \frac{\varphi_1}{8 A^2} + \frac{\sqrt{1 - A^2 (a^2 - b^2)}}{8 A^2}, \sqrt{a^2 - b^2} [1 - 2 (a^2 - b^2) A].$$

Die Gesamtanziehung ist $\iint \frac{d v \cdot x}{\sqrt{b^2 + \lambda} (\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda})} =$

$$\mathfrak{A} = \iint \frac{d\lambda \, d\varphi}{2 \sqrt{a^2 + \lambda} \sqrt{b^2 + \lambda}} [(a^2 + \lambda) - (a^2 - b^2) \sin\varphi] \cos\varphi =$$

$$\int \frac{2 (a^2 + \lambda) \sin\varphi \, d\lambda}{2 \sqrt{a^2 + \lambda} \sqrt{b^2 + \lambda} (\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda})} -$$

$$\frac{a^2 - b^2}{3} \int \frac{2 \sin^3\varphi \, d\lambda}{2 \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} (\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda})} =$$

$$2 \int_0^{\varphi_1} \frac{A}{4} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \left(\frac{\cos^2\varphi}{A^2} + 2 (a^2 - b^2) + \frac{(a^2 - b^2) A^2}{\cos^2\varphi} \right) d\varphi -$$

$$\frac{2 (a^2 - b^2)}{3} \int_0^{\varphi_1} A \frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi}{2 A} d\varphi +$$

$$(a^2 - b^2) \int_0^{\varphi_1} \frac{A}{\cos^2\varphi} d\varphi - (a^2 - b^2) A \varphi_1 + \int \frac{(a^2 - b^2) A^3 \sin^2\varphi}{2 \cos^4\varphi} d\varphi$$

$$- \frac{2 (a^2 - b^2) A}{3} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{\varphi_1}{4 A} + \frac{\sqrt{1 - A^2 (a^2 - b^2)} \sqrt{a^2 - b^2}}{4} (1 - 2 A^2 (a^2 - b^2)).$$

Daraus folgt $\mathfrak{A} = 2 A J$.

Das gibt, da A die Anziehung eines Punktes der Begrenzung ist, den Satz:

Die Gesamtanziehung des Körpers grösster Anziehung auf eine Ellipse ist ebensogross wie die Anziehung, die die doppelte Masse, nach einem beliebigen Gesetz über die Begrenzung verteilt, auf die Ellipse ausübt.

Die Anziehung $\mathfrak{A}$ hängt ausser von A noch von $\sqrt{a^2 - b^2} = e$ ab. Bestimmen wir also das Maximum maximorum, so ist e zu ermitteln aus

$$\frac{d\,\mathfrak{A}}{d\,e} = 0 = \frac{1}{4\sqrt{1 - e^2 A^2}} + \frac{\sqrt{1 - e^2 A^2}}{4} - \frac{A^2 e^2}{4\sqrt{1 - e^2 A^2}} - \frac{3\,e^2 A^2}{2}\sqrt{1 - e^2 A^2} + \frac{e^4 A^4}{2\sqrt{1 - e^2 A^2}}.$$

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{1 - e^2 A^2}{4} - \frac{e^2 A^2}{4} - \frac{3\,e^2 A^2}{2}(1 - e^2 A^2) + \frac{e^4 A^4}{2}.$$

$$0 = 1 - 4\,e^2 A^2 + 4\,e^4 A^4.$$

$$e = \frac{1}{2\,A}\sqrt{2}\,; \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\mathfrak{A}_{\max} = \frac{\pi}{16\,A} + \frac{1}{8\,A}\left(1 - \tfrac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{16\,A}.$$

Dazu gehört $J = \dfrac{\pi}{32\,A^2}.$

§ 7. Der Fall $a_1 = a_2 = \ldots a_n$.

Die Zwischenfälle $a_\mu = a_\nu$; $a_\mu \neq a_k$ bieten nichts neues. Wir behandeln gleich diesen Fall, wo das E_n zu einer Kugel K_n wird, die nach dem Maclaurinschen Satze durch ihren Mittelpunkt ersetzt werden kann. Wir bekommen da direkt: Anziehung eines Punktes $(x_1 \ldots x_n)$ der Begrenzung auf den Mittelpunkt 0 in Richtung der x_n-Achse

$$\frac{C}{r^{n-1}} \cos (r\, x_n) = \frac{C\, x_n}{r_n} = \frac{C\, x_n}{[x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2]^{\frac{n}{2}}} = \text{Konst.},$$

wo C eine Konstante ist;

$$\frac{x_n}{[x_1^2 + \ldots x_n^2]^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{c^{n-1}} \text{ oder } x_n^{\frac{2}{n}}\, c^{\frac{2(n-1)}{n}} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$$

Dasselbe Resultat gibt Einsetzen:

$$\text{Konst.} = x_n\, Z_n^{(\lambda)} = x_n \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{\frac{n}{2}\, x_n}{[x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2]^{\frac{n}{2}}};$$

der Körper grösster Anziehung ist also ein „Rotations“körper um die x_n-Achse. Ein beliebiger Meridianschnitt hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = x^{\frac{2}{n}}\, c^{\frac{2(n-1)}{n}}, \text{ oder wenn man } x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi \text{ setzt: } r^{n-1} = c^{n-1} \cos \varphi.$$

Man bestimme die grösste Breite dieser Kurve:

$$\text{Aus } y = x^{\frac{1}{n}} \sqrt{c^{\frac{2(n-1)}{n}} - x^{\frac{2(n-1)}{n}}} \text{ folgt:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{}}{x^{\frac{n-1}{n}}} - \frac{n-1}{n} \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt{}} = 0. \text{ Daraus findet man}$$

$$= \frac{c}{\sqrt[2(n-2)]{n^n}};\ y = c\sqrt{n-1}\, n^{-\frac{n}{2(n-1)}}$$

$$x : y = 1 : \sqrt{n-1};$$

mit wachsendem n rückt das Maximum der Breite immer näher an die y Achse.

Länge der Kurve $y = 0$, $\bar{x} = c$. Verhältnis von Länge und Breite

$$\bar{x} : 2y = \sqrt[2(n-1)]{\frac{n^n}{(n^2-1)^{n-1}}} : 2;$$

für $n = \infty$ wird das Verhältnis wie 1 : 2. Die Meridiankurve wird ein Halbkreis. Der Krümmungsradius für den

Nullpunkt ist für $n > 2$ gleich ∞, für den Punkt $(x = c, y = 0)$, gleich $\frac{n-1}{n}$, nähert sich also immer mehr dem c.

Um Inhalt und Anziehung des Körpers zu bestimmen, führen wir im R_n Polarkoordinaten ein

$$x_n = r \cos \varphi_1, \quad x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \ldots$$
$$x_k = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-k+2} \cos \varphi_{n-k+1}, \ldots$$
$$x_2 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \cos \varphi_{n-1}; \quad x_1 = r \sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-1},$$

dann erhält man

$$J = \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)} \frac{2 c^n}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{n-1}} \varphi \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{c^n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2(n-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\right)}.$$

Bei ungeradem n wird J eine algebraische Funktion von π, bei geradem n aber transcendent.

Gesamtanziehung auf 0 ist

$$\mathfrak{A} = S \frac{dv \cos \varphi_1}{r^{n-1}},$$

da nur die x_n Komponente wirksam ist,

$$= \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} 2 c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{n-1}} \varphi \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi.$$

$$\mathfrak{A} = \frac{n J}{c^{n-1}}.$$

Hier folgt also allgemein für n Dimensionen der vorhin für die Ellipse besonders bewiesene Satz:

Die Anziehung, die der Punkt 0 von dem Körper erfährt, ist ebensogross wie die Anziehung, die die im Gegenpol vereinigte n-fache Masse auf den Punkt ausüben würde; oder:

Die Anziehung des Körpers auf 0 ist gleich der Anziehung, die die n-fache Masse, beliebig auf der Oberfläche verteilt, auf 0 ausüben würde.

Für $n = 3$ ist dieser Satz von Playfair und Sella ausgesprochen worden. — Auch rein analytische Behandlung bestätigt hier das Resultat. Der Natur der Aufgabe nach ist der Körper Rotationskörper. Anziehung einer Elementarkugel K_{n-1} von der „Dicke" $d\,x_n$ ist

$$d\,\mathfrak{A} = \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\, d\,x_n \int^{\varrho} \frac{x_n\, \varrho^{n-2}\, d\,\varrho}{(x_n^2 + \varrho^2)^{\frac{n}{2}}}$$ [1]

$$\mathfrak{A} = \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^c d\,x_n \int^{\varrho} \frac{x_n\, \varrho^{n-2}\, d\,\varrho}{(x_n^2 + \varrho^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$d\,J = \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\, d\,x_n \int^{\varrho} \varrho^{n-2}\, d\,\varrho$$

$$J = \int_0^c \frac{\varrho_1^{\,n-1}}{n-1}\, d\,x_n \cdot \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Jetzt soll $\mathfrak{A}$ ein Maximum werden, während J konstant bleibt; setzt man also

$$F = \left(\int_0^{\varrho_1} \frac{x_n\, \varrho^{n-2}}{(x_n^2 + \varrho^2)^{\frac{n}{2}}}\, d\,\varrho - \frac{\mu}{n-1}\, \varrho_1^{\,n-1} \right) \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

so muss sein:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{d}{d\,x_n}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho'}\right) = 0, \text{ d.h. } \frac{x_n\, \varrho^{n-1}}{(x_n^2 + \varrho^2)^{\frac{n}{2}}} - \frac{\mu}{n-1}\, \varrho^{n-1} = 0,$$

oder:

$$\frac{x_n}{(x_n^2 + \varrho^2)^{\frac{n}{2}}} = \text{konst.} = \frac{x_n}{[x_1^2 + \ldots x_n^2]^{\frac{n}{2}}},$$

das ist aber dasselbe Resultat wie oben.

1) Vgl. Schoute II, S. 289.

II. Teil.

Körper grösster Anziehung auf zwei Ellipsoide von n Dimensionen.

Kapitel I. Lösung für die Ebene.

§ 8. Aufstellung der Gleichung.

Problem: Gegeben eine homogene Masse der Grösse nach und zwei Ellipsen der Lage und Form nach. Welche Gestalt und Lage ist der Masse zu geben, damit sie auf beide Ellipsen in gegebenen Richtungen maximale Anziehung ausübt.

Wir wählen die Verbindungsgerade der Ellipsenmittelpunkte zur X-Achse und die Mittelsenkrechte zur Y-Achse. Die grossen Achsen der Ellipsen mögen mit der X-Achse Winkel mit den Cosinus (α_1, β_1) und (α_2, β_2) bilden; dann sind die Gleichungen der Ellipsen, wenn wir der Einfachheit halber, die Achsen gleich nehmen und mit m den Abstand des Ellipsenmittelpunkts vom Koordinatenanfang bezeichnen:

$$\frac{[(x+m)\,\alpha_1 + y\,\beta_1]^2}{a^2} + \frac{[-\beta_1\,(x+m) + \alpha_1\,y]^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{[(x-m)\,\alpha_2 + y\,\beta_2]^2}{a^2} + \frac{[-\beta_2\,(x-m) + \alpha_2\,y]}{b^2} = 1.$$

Sind die Achsen nicht gleich, so werden nur die Verhältnisse unsymmetrisch. Die Methode bleibt ganz dieselbe. Nach § 4 wirkt ein Punkt $(X_1\,Y_1)$ auf eine Ellipse

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

in Richtung ϑ_1 $(\delta_1\, \delta'_1)$ [von der grossen Achse der Ellipse gerechnet] mit einer Anziehungskraft

$$\delta_1 X_1 Z_1^{(\lambda)} + \delta_1' Y_1 Z_2^{(\lambda)}$$

wo

$$Z_1^{(\lambda)} = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda}\,\left(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda}\right)}.$$

$$Z_2^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}\,\left(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda}\right)} \text{ ist.}$$

Setzen wir hier für X und Y die Werte aus den obigen Ellipsengleichungen ein, so erhalten wir als Anziehungskomponente auf die Ellipse I in Richtung ϑ_1:

$$A_1 = \left\{ \frac{\delta_1\left((x+m)\,\alpha_1 + y\,\beta_1\right)}{\sqrt{a^2+\lambda_1}} + \frac{\delta_1'\left(-(x+m)\,\beta_1 + y\,\alpha_1\right)}{\sqrt{b^2+\lambda_1}} \right\} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1}}.$$

Die Anziehungskomponente desselben Punktes auf die Ellipse II in Richtung ϑ_2 $(\delta_2\, \delta_2')$ ist:

$$A_2 = \left\{ \frac{\delta_2\left((x-m)\,\alpha_2 + y\,\beta_2\right)}{\sqrt{a^2+\lambda_2}} + \frac{\delta_2'\left(-(x-m)\,\beta_2 + y\,\alpha_2\right)}{\sqrt{b^2+\lambda_2}} \right\} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2}}.$$

Soll der Punkt ein Punkt der Begrenzung sein, so ist nach § 1 die Summe beider Anziehungskomponenten konstant. Also ist die Gleichung der Begrenzung

$$\text{(I.)} \qquad A_1 + A_2 = \text{Konst.} = A,$$

wo sich die Konstante A bestimmt aus der gegebenen Masse und wo λ_1 und λ_2 bestimmt sind für jedes x, y als grösste Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{[(x+m)\,\alpha_1 + y\,\beta_1]^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{[-(x+m)\,\beta_1 + y\,\alpha_1]^2}{b^2+\lambda_1} = 1.$$

$$\text{(I.)}\qquad \frac{[(x-m)\,\alpha_2 + y\,\beta_2]^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{[-(x-m)\,\beta_2 + y\,\alpha_2]^2}{b^2+\lambda_2} = 1.$$

§ 9. Diskussion und Konstruktion der Kurve.

Die Gleichung (I.) enthält die 12 Parameter

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, a, b, \delta_1, \delta_1', \delta_2, \delta_2', m, A,$$

von denen aber wegen

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 = \delta_1^2 + \delta_1'^2 = \delta_2^2 + \delta_2'^2$$

und da wegen des Maclaurinschen Satzes a und b als ein Parameter betrachtet werden können, nur 7 Parameter unabhängig sind.

Nach der mechanischen Bedeutung der Gleichung endet die Kurve auf den Ellipsen, also bei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Fasst man sie aber mathematisch auf, so können λ_1 und λ_2 bis $-b^2$ abnehmen. Eine mechanische Deutung erhält diese Fortsetzung, indem man die angezogenen Ellipsen durch die Fokallinien ersetzt.

Für konstante Masse wird bei wachsendem m das A abnehmen. Wird die Masse grösser, so nimmt A ebenfalls ab. Aus dem Maclaurinschen Satze folgt wieder, dass jedes konfokale Ellipsenpaar den Körper grösster Anziehung so schneidet, dass das ausserhalb liegende Stück für diese Ellipsen wieder ein Körper grösster Anziehung in den gegebenen Richtungen ist.

Führen wir in Bezug auf die Ellipsen die exzentrischen Anomalien ein, so ist

$$X = \sqrt{a^2+\lambda}\,\cos\varphi,\quad Y = \sqrt{b^2+\lambda}\,\sin\varphi,\ \text{so wird}$$

$$A_1 = \frac{\cos(\vartheta_1 - \varphi_1)}{\sqrt{a^2+\lambda_1} + \sqrt{b^2+\lambda_1}},\quad A_2 = \frac{\cos(\vartheta_2 - \varphi_2)}{\sqrt{a^2+\lambda_2} + \sqrt{b^2+\lambda_2}}.$$

Also lautet die Gleichung der Begrenzung des Körpers grösster Anziehung

$$A = \frac{\cos(\vartheta_1 - \varphi_1)}{\sqrt{a^2 + \lambda_1} + \sqrt{b^2 + \lambda_1}} + \frac{\cos(\vartheta_2 - \varphi_2)}{\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}}.$$

Für eine gegebene Ellipse lassen sich nun die Kurven

$$A_1 = \frac{\cos(\vartheta_1 - \varphi_1)}{\sqrt{a^2 + \lambda_1} + \sqrt{b^2 + \lambda_1}}$$

leicht geometrisch konstruieren.[1]) Man zeichne diese ganze Kurvenschar bei variablem A_1 und dasselbe für die andere Ellipse. Suchen wir jetzt die Schnittpunkte je zwei solcher Kurven der beiden Scharen, dass $A_1 + A_2 =$ unserm gegebenen A ist, so haben wir damit die Punkte unserer Kurve.

Mit Hilfe dieser Konstruktion kann man dann auch sofort die Kurven bei variablem A angeben. Indessen müssen da für kleine A auch negative A_1 und A_2 gezeichnet werden.

Aus dieser Konstruktion lassen sich Folgerungen für die Extremwerte von A ziehen. Ist die gegebene Masse klein, so zerfällt der Körper in zwei Teile, die den Ellipsen anliegen. Da nun die Ellipsen nicht in allen Richtungen gleich stark angezogen werden, so werden die beiden Teile ungleich sein. Lassen wir also A weiter wachsen (M abnehmen), so wird bei einem bestimmten A_{m_1} der eine Teil des Körpers in einen Punkt zusammengeschrumpft sein. Zu einem Punkte kann aber nach unserer Konstruktion der Kurventeil nur werden, wenn

$$(1.) \qquad A_1 = \frac{\cos(\varphi_1 - \vartheta_1)}{\sqrt{a^2 + \lambda_1} + \sqrt{b^2 + \lambda_1}}$$

zu einem Punkte wird und das zugehörige

$$A_2 = A_{m_1} - A_1 = \frac{\cos(\varphi_2 - \vartheta_2)}{\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}}$$

durch diesen Punkt geht. Nach Spijker ist der grösste Wert

1) Vgl. Spijker, a. a. O., S. 75—76.

für A_1, für den die Kurve (1.) ein Punkt wird,

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{e}.$$

Die Koordinaten dieses Punktes sind

(2.) $$X = e\,\delta_1 = (x + m)\,\alpha_1 + y\,\beta_1.$$

(3.) $$Y = -(x + m)\,\beta_1 + y\,\alpha_1 = 0.$$

$$y = e\,\delta_1\,\beta_1, \quad x = -m + e\,\delta_1\,\alpha_1.$$

Setzt man dies in A_2 ein, so ergibt sich für

$$A_{m_1} = \frac{1}{e} + \left\{ \frac{\delta_2\,[(e\,\delta_1\,\alpha_1 - 2\,m)\;\alpha_2 + e\,\delta_1\,\beta_1\,\beta_2]}{\sqrt{a^2 + \lambda_2}} + \frac{\delta_2'\,[-(e\,\delta_1\,\alpha_1 - 2\,m)\;\beta_2 + e\,\delta_1\,\beta_1\,\alpha_2]}{\sqrt{b^2 + \lambda_2}} \right\} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}},$$

wo sich λ_2 bestimmt als grösste Wurzel von

$$1 = \frac{[(e\,\delta_1\,\alpha_1 - 2\,m)\;\alpha_2 + e\,\delta_1\,\beta_1\,\beta_2]^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{[-(e\,\delta_1\,\alpha_1 - 2\,m)\;\beta_2 + e\,\delta_1\,\beta_1\,\alpha_2]^2}{b^2 + \lambda_2}.$$

Analog wird der Ausdruck, wenn der Teil an der zweiten Ellipse zum Punkte zusammenschrumpft. Man erhält also nur reelle Kurven, wenn A kleiner bleibt als der grösste der Werte A_{m_1}, A_{m_2}. Für $\delta_1 = \delta_2$, $\delta_1' = \delta_1'$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ wird $A_{m_1} = A_{m_2}$.

Für das Maximum ist (I.) also ein Punkt, dagegen eine Kurve für $A_{max} > A > A_{m_2}$, eine Kurve und ein Punkt für $A = A_{m_2}$, für $A < A_{m_2}$ zwei Kurvenzweige, die sich berühren bei A, dann bei gewissen Werten A' und A'' oben und unten eine Undulationstangente zulassen. Für $A = 0$ endlich verlaufen die Kurvenzweige ins Unendliche.

Als „Fusspunkte" der Kurve bezeichne ich die Endpunkte derselben auf den mit Masse belegten Fokallinien $F_1\,F_1'$ und $F_2\,F_2'$.

Wird nach dem Körper grösster Anziehung gefragt, ohne die Richtungen ϑ_1 und ϑ_2 zu geben, so sind diese so

zu bestimmen, dass die Gesamtanziehung ein Maximum wird. Dazu sind wieder ϑ_1 und ϑ_2 so zu bestimmen, dass die resultierende Gesamtanziehung in diese Richtungen fällt. Ein Element d x d y wirkt mit einer X Komponente

$$d^2(X) = \frac{X_1\, dx\, dy}{\sqrt{a^2+\lambda}\,(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda})},$$

$$\text{also } (X) = \iint \frac{X_1\, dx\, dy}{\sqrt{a^2+\lambda}\,(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda})};$$

$$(Y) = \iint \frac{Y_1\, dx\, dy}{\sqrt{b^2+\lambda}\,(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda})}$$

auf die eine Ellipse. Die Richtung der Anziehung ist also

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \vartheta_1 = F_1(\vartheta_1\, \vartheta_2); \text{ ebenso } \operatorname{tg} \vartheta_2 = F_2(\vartheta_1\, \vartheta_2).$$

Das sind die Bestimmungsgleichungen für ϑ_1 und ϑ_2. Theoretisch ist also damit das Problem gelöst. Praktisch ausführbar sind aber nur die Spezialfälle, wo man ϑ_1 und ϑ_2 sofort angeben kann.

§ 10. Eigentlicher Körper grösster Anziehung (I. Spezialfall).

Als ersten solchen Fall betrachten wir den, wo die kleinen Achsen der Ellipsen in einer Geraden liegen. Man erkennt dann sofort, dass $\vartheta_2 = 270^0$ und $\vartheta_1 = 90^0$ zu nehmen sind. Dann wird sich nämlich aus Symmetrierücksichten die Masse symmetrisch zur X Achse, zur Anziehungsrichtung verteilen. Nach Spijker[1]) übt eine Ellipse in Richtung der kleinsten Achse die grösste Anziehung aus. Wenn also ausser der Masse nur die Mittelpunkte der Ellipsen fest gegeben sind, so müssen, um die grösste Anziehung zu erhalten, die Ellipsen so gedreht werden, dass die kleinsten Achsen in einer Geraden liegen. Die Gleichung der Begrenzung ist dann

1) Spijker, S. 83.

$$\frac{x+m}{\sqrt{b^2+\lambda_1}\,(\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1})}-$$

$$\frac{x-m}{\sqrt{b^2+\lambda_2}\,(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda^2})}=A;$$

$$\frac{(x+m)^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{a^2+\lambda_1}=1; \quad \frac{(x-m)^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{a^2+\lambda_2}=1.$$

Man erkennt sofort, dass die Kurve symmetrisch zu beiden Achsen verläuft.

Die Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen sich mittels

$$x=-m+\sqrt{b^2+\lambda_1}, \quad x=m-\sqrt{b^2+\lambda_2},$$

$$2\,m=\sqrt{b^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1}}+$$

$$\frac{1}{(2\,m-\sqrt{b^2+\lambda_1})+\sqrt{e^2+(2\,m-\sqrt{b^2+\lambda_1})^2}}=A;$$

hieraus bestimmen sich λ_1 und λ_2. Da aber λ nicht kleiner als 0, oder bei mathematischer Behandlung nicht kleiner als $-b^2$ werden kann, so bekommt man als Extremwerte für A

$$A'_m=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(2\,m-b)+\sqrt{4\,m^2-4\,m\,b+a^2}} \quad (\text{für } \lambda_1=0)$$

$$A_m=\frac{1}{e}+\frac{1}{2\,m+\sqrt{e^2+4\,m^2}} \quad (\text{für } \lambda_1=-b^2).$$

Diese Schnittpunkte mit der x-Achse sind aber nur reell, wenn A zwischen A_m und einem A^* liegt, das sich gleich bestimmen wird.

Die Schnittpunkte mit der y-Achse:
Setzt man $x=0$, so ist

$$A=\frac{2\,m}{\sqrt{b^2+\lambda}\,(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda})}.$$

Diese Gleichung liefert ein $\lambda = l_1$, dazu gehört

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{m^2}{b^2 + l_1}} \sqrt{a^2 + l_1};$$

dieser Ausdruck ist reell nur für $l_1 > m^2 - b^2$. Die Kurve geht durch den Nullpunkt, wenn $l_1 = m^2 - b^2$ ist, also, dies eingesetzt, wenn

$$A = A^* = \frac{2}{m + \sqrt{e^2 + m^2}} \text{ ist.}$$

Ist $A > A^*$, dann wird y imaginär, aber x ist reell; ist $A < A^*$, so wird y reell, x imaginär.

Fusspunkte der Kurve $\lambda_1 = -b^2$, $x = -m$. Aus

$$A = \frac{1}{e}\sqrt{1 - \frac{a^2 + \lambda_2}{e^2}\left\{1 - \frac{4\,m^2}{b^2 + \lambda^2}\right\}} + \frac{2\,m}{\sqrt{b^2 + \lambda_2}\left(\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}\right)}$$

bestimmt sich $\lambda_2 = l_2$; dann haben die Fusspunkte die Koordinaten:

$$x = -m;\ y \pm \sqrt{a^2 + l_2}\sqrt{1 - \frac{4\,m^2}{b^2 + l_2}}.$$

Die beiden Fusspunkte können nur zusammenfallen für $y = 0$, $l_2 = 4\,m^2 - b^2$. Das gibt

$$A = \frac{1}{e} + \frac{2\,m}{2\,m\,(2\,m + \sqrt{4\,m^2 + e^2})} = A_m$$

d. h. die Fusspunkte sind immer reell. Da y mit l_2 wächst, werden bei einem gewissen Werte

$$A' = \frac{2\,m}{\sqrt{b^2 + \lambda_2}\left(\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}\right)};\ \frac{e^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{4\,m^2}{b^2 + \lambda_2} = 1$$

die Fusspunkte in die Brennpunkte fallen. Wird A noch kleiner, dann ist

$$\text{Lim}\,\frac{x + m}{\sqrt{b^2 + \lambda_1}} = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{e^2}}$$

zu nehmen, denn jetzt gibt

$$A = \frac{2\,m}{\sqrt{b^2+\lambda_2}\,(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2})} \text{ ein } \lambda^2 > 4\,m^2 - b^2,$$

$$\text{also}\quad y = \sqrt{a^2+\lambda_2}\sqrt{1-\frac{4\,m^2}{b^2+\lambda_2}}$$

ist reell, die Kurven schneiden die Gerade $x = -m$, $x + m$ geht von negativen Werten zu 0. Die Fusspunkte nähern sich wieder, bis sie für $A = 0$ nach

$$x = -m,\; y = \pm\sqrt{a^2+\bar{l}_2}\sqrt{1-\frac{4\,m^2}{b^2+\bar{l}_2}}$$

kommen, wo $\bar{l}_2$ Wurzel der Gleichung

$$1 - \frac{a^2+\lambda}{e^2}\left(1-\frac{4\,m^2}{b^2+\lambda}\right) = \frac{4\,m^2}{e^2(b^2+\lambda)}\,(\sqrt{a^2+\lambda}-\sqrt{b^2+\lambda})^2$$

$$\text{oder}\quad 4\,m^2 + b^2 + \lambda = 8\,m^2\frac{\sqrt{a^2+\lambda}}{\sqrt{b^2+\lambda}} \text{ ist.}$$

Um die Gestalt der Kurve weiter zu untersuchen, bestimme man

$$\frac{dy}{dx} = \Bigg[\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda_1}(\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1})} - \frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda_2}(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2})} - $$

$$\frac{\dfrac{(x+m)^2}{\sqrt{a^2+\lambda_1}\,\sqrt{(b^2+\lambda_1)^5}}}{\left(\dfrac{x+m}{b^2+\lambda_1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{a^2+\lambda_1}\right)^2} + \frac{\dfrac{(x-m)^2}{\sqrt{a^2+\lambda_2}\,\sqrt{(b^2+\lambda_2)^5}}}{\left(\dfrac{x-m}{b^2+\lambda_2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{a^2+\lambda_2}\right)^2}\Bigg] :$$

$$\left[\frac{\dfrac{y\,(x+m)}{\sqrt{(a^2+\lambda_1)^3}\sqrt{(b^2+\lambda_1)^3}}}{\left(\dfrac{x+m}{b^2+\lambda_1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{a^2+\lambda_1}\right)^2} + \frac{\dfrac{y\,(x-m)}{\sqrt{(a^2+\lambda_2)^3}\sqrt{(b^2+\lambda_2)^3}}}{\left(\dfrac{x-m}{b^2+\lambda_2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{a^2+\lambda_2}\right)^2}\right].$$

Man sieht, die Kurven schneiden die Achsen immer senkrecht. Für die Fusspunkte ist

$$\frac{dy}{dx} = \left[-\frac{1}{e^2} + \frac{\dfrac{(2\,m)^2}{(a^2+\lambda_2)^{\frac{1}{2}}(b^2+\lambda_2)^{\frac{5}{2}}}}{\dfrac{4\,m^2}{(b^2+\lambda_2)^2} + \dfrac{y^2}{(a^2+\lambda_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda_2}\left(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2}\right)} \right] :$$

$$\left[\frac{\dfrac{y}{e^3}\sqrt{1-\dfrac{y^2}{e^2}}}{1-\dfrac{y^2}{e^2}} + \frac{y\,\dfrac{2\,m}{(a^2+\lambda_2)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda_2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{4\,m^2}{(b^2+\lambda_2)^2} + \dfrac{y^2}{(a^2+\lambda_2)^2}} \right];$$

für $y = e$ wird indessen der Ausdruck unbestimmt; die Zeichnung ergibt jedoch sofort $\frac{dy}{dx} = \infty$. $x = -m$ ist Doppeltangente für A'.

Im 0 Punkt bestimmt sich $\frac{dy}{dx} = 1$.

Auch die analytische Behandlung gibt dieselbe Gleichung. Die Anziehung eines Elementes $dx\,dy$ ist

$$d^2\mathfrak{A} = \left(\frac{(x+m)}{\sqrt{b^2+\lambda_1}\left(\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1}\right)} - \frac{x-m}{\sqrt{b^2+\lambda_2}\left(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2}\right)} \right) dx\,dy;$$

$$\mathfrak{A} = \int_{-m}^{+m} dx \int \ldots dy.$$

Der Inhalt ist $J = \int\int dy\,dx = \int_{-m}^{+m} y\,dx$; setzen wir

$$F = \int \left(\frac{x+m}{\sqrt{b^2+\lambda_2}\left(\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1}\right)} - \frac{x-m}{\sqrt{b^2+\lambda_2}\left(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2}\right)} \right) dy - \mu\,y,$$

so ist, wenn $\mathfrak{A}$ ein Maximum, J konstant bleiben soll:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0; \quad \frac{x + m}{\sqrt{b^2 + \lambda_1}\left(\sqrt{a^2 + \lambda_1} + \sqrt{b^2 + \lambda_1}\right)} -$$

$$\frac{x - m}{\sqrt{b^2 + \lambda_2}\left(\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}\right)} = \mu = \text{konst.}$$

Soll ausserdem auch m variieren, so ist die Bestimmungsgleichung von m für absolutes Maximum:

$$F(x = + m) + F(x = - m) + \int_{-m}^{+m} \frac{\partial F}{\partial m}\, dx = 0.$$

Dadurch bestimmt sich also auch m und, wo in besondern Fällen diese Gleichung explizit bestimmt und der Ausdruck für $\mathfrak{A}$ ermittelt werden kann, lässt sich dann leicht auch der letzte Parameter e so bestimmen, dass $\mathfrak{A}$ ein Maximum wird; das ist dann wieder das Maximum maximorum.

§ 11. II. Spezialfall.

Die Anziehungsrichtungen ϑ_1 und ϑ_2 sind ebenfalls leicht anzugeben, wenn die Ellipsen so liegen, dass ihre grossen Achsen sich in einer Geraden befinden. Wegen der Symmetrie fällt hier wieder Richtung der Gesamtanziehung und maximale Anziehungsrichtung zusammen, wenn wir die letztere in Richtung der grossen Achsen wählen.

$$\vartheta_1 = 0, \ \vartheta_2 = 180^0, \ \alpha_1 = 1 = \alpha_2, \ \beta_1 = 0 = \beta_2.$$

$$\frac{x + m}{\sqrt{a^2 + \lambda_1}\left(\sqrt{a^2 + \lambda_1} + \sqrt{b^2 \pm \lambda_1}\right)} -$$

$$\frac{x - m}{\sqrt{a^2 + \lambda_2}\left(\sqrt{a^2 + \lambda_2} + \sqrt{b^2 + \lambda_2}\right)} = A.$$

$$\frac{(x + m)^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} = 1. \quad \frac{(x - m)^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_2} = 1.$$

Die Kurve liegt ebenfalls symmetrisch zu beiden Achsen.

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1}} +$$

$$(2\,m - \sqrt{a^2+\lambda_1}) + \sqrt{(2\,m-\sqrt{a^2+\lambda_1})^2 - e^2}\,.$$

Aus dieser Gleichung bestimmen sich zwei Werte λ_1; dann ist

$$x = -m + \sqrt{a^2+l_1} \qquad x = -m + \sqrt{a^2+l_2}\,.$$

l_1 und l_2 sind aber nur reell, solange A zwischen den Grenzen A_m und A^* liegt, deren Werte sich gleich bestimmen. Nach der allgemeinen Formel ist

$$A_{m_1} = A_{m_2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{(2\,m-e)+\sqrt{4\,m^2-4\,m\,e}}\,.$$

Das A^* bestimmt sich aus der Berechnung der Schnittpunkte mit der y Achse:

$$A = \frac{2\,m}{\sqrt{a^2+\lambda}\,(\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda})}$$

gibt eine Wurzel $\lambda = l_3$. Dann ist

$$y = \pm\sqrt{b^2+l_3}\sqrt{1-\frac{m^2}{a^2+l_3}}$$

das ist reell nur, wenn $l_1 > m^2 - a^2$. Für $l_1 = m^2 - a^2$ geht die Kurve durch den Nullpunkt. Das zugehörige A ist

$$A^* = \frac{2}{m+\sqrt{m^2-e^2}}$$

Fusspunkte der Kurve: Die Gleichung

$$A = \frac{2\,m-\sqrt{a^2+\lambda_2}}{e^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2}}$$

bestimmt $\lambda_2 = l_4$. Daraus folgt $x = m - \sqrt{a^2+l_4}$. Die beiden Fusspunkte vom vorigen § sind hier in einen zusammengefallen. Für $A = A_m$ fallen die Fusspunkte an jeder Fakallinie in die zunächst gelegenen Brennpunkte. Für $A = 0$ ist $x = m - \sqrt{a^2+l_5}$ wo l_5 Wurzel der Gleichung

$$\frac{2m - \sqrt{a^2 + l_5}}{e^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + l_5} + \sqrt{b^2 + l_5}} = 0$$

oder $l_5 = 4m^2 - b^2$, $x = m - \sqrt{4m^2 + e^2}$ ist. Dieser Punkt ist dann der Scheitel der hyperbelähnlichen Figur, dessen Punkte auf beide Ellipsen in Richtung der x Achse keine Anziehung ausüben.

Zur näheren Bestimmung der Gestalt der Kurve berechne man

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_1}\left(\sqrt{a^2+\lambda_1}+\sqrt{b^2+\lambda_1}\right)} - \frac{\dfrac{(x+m)^2}{(a^2+\lambda_1)^{\frac{5}{2}}(b^2+\lambda_1)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\dfrac{x+m}{a^2+\lambda_1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b^2+\lambda_1}\right)^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda_2}\left(\sqrt{a^2+\lambda_2}+\sqrt{b^2+\lambda_2}\right)} - \frac{\dfrac{(x-m)^2}{(a^2+\lambda_2)^{\frac{5}{2}}(b^2+\lambda_2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\dfrac{x-m}{a^2+\lambda_2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b^2+\lambda_2}\right)^2}\right)\right]:$$

$$y\left[\frac{\dfrac{x+m}{[(b^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_1)]^{\frac{3}{2}}}}{\left(\dfrac{x+m}{a^2+\lambda_1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b^2+\lambda_1}\right)^2} - \frac{\dfrac{x\,m}{\sqrt{(b^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_2)^3}}}{\left(\dfrac{x-m}{a^2+\lambda_2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b^2+\lambda_2}\right)^2}\right].$$

Die Kurve schneidet die Achsen wieder senkrecht. Für den Fusspunkt ist

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{e\sqrt{1-\dfrac{(x+m)^2}{e^2}}\sqrt{a^2+\lambda_2}}{(x+m)\sqrt{b^2+\lambda_2}}.$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen endlich. Aus den beiden Werten + und — folgt, dass die Kurve hier am Ende Spitzen bildet. Nur für $x = -m$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h. die

Gerade $x = -m$ ist hier Undulationstangente, die Spitze ist verschwunden. Im Grenzfall $A = 0$ ist der Winkel σ, den die Tangente im Endpunkt mit der Achse bildet, bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{(2 m^2 + e^2) e \sqrt{1 - \frac{(2 m - \sqrt{4 m^2 + e^2})^2}{e^2}}}{m \sqrt{4 m^2 + e^2} (2 m - \sqrt{4 m^2 + e^2})}.$$

Im Nullpunkt ist $\frac{dy}{dx} = 1.$

§ 12. Spezialfall $a = b$.

Für $a = b$ werden die Ellipsen zu Kreisen, die wir durch ihre Mittelpunkte ersetzen können. Der Körper grösster Anziehung auf zwei Punkte in der Ebene ist also begrenzt durch die Kurve

$$\frac{x + m}{(x + m)^2 + y^2} - \frac{x - m}{(x - m)^2 + y^2} = A.$$

Rein analytisch erhält man dies Resultat so: Die Anziehung eines Flächenelementes auf den einen Punkt M_1 ist

$$\frac{(x + m)\, dx\, dy}{(x + m)^2 + y^2},$$

also die eines Streifens senkrecht zur x-Achse

$$\int_{-y}^{+y} \frac{(x + m)\, dx\, dy}{(x + m)^2 + y^2};$$

ebenso ist die Anziehung dieses Streifens auf M_2:

$$\int_{-y}^{+y} - \frac{(x - m)\, dx\, dy}{(x - m)^2 + y^2}.$$

Die Anziehung des Streifens auf beide Punkte ist also:

$$dx\int_{-y}^{+y}\left(\frac{x+m}{(x+m)^2+y^2}-\frac{x-m}{(x-m)^2+y^2}\right)dy=$$

$$2\,dx\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{m+x}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x-m}\right).$$

Die Anziehung des ganzen Körpers ist

$$\mathfrak{A}=\int_{-m}^{+m}2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{m+x}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x-m}\right)dx.$$

Diese soll ein Maximum sein, während $J=\int_{-m}^{+m}2y\,dx$ konstant bleiben soll. Bedingung dafür ist, wenn man

$$F=\operatorname{arctg}\frac{y}{m+x}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x+m}-\mu y \text{ setzt,}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \text{ d. h.:}$$

$$\frac{x+m}{(x+m)^2+y^2}-\frac{x-m}{(x-m)^2+y^2}=\mu=\text{konst.}$$

Soll ausserdem m variabel gedacht werden, so ist weiter die Bedingung zu erfüllen:

$$F(x=m)+F(x=-m)+\int_{-m}^{+m}\frac{\partial F}{\partial m}dx=0.$$

Die Ausführung ergibt:

$$(1)\qquad \pi=\int_{-m}^{+m}\left(\frac{y}{(m+x)^2+y^2}+\frac{y}{(x-m)^2+y^2}\right)dx.$$

Formen wir diese Bedingung um:

$$m\pi=A\int_{-m}^{+m}y\,dx-\int_{-m}^{+m}x\left\{\frac{y}{(m+x)^2+y^2}-\frac{y}{(m-x)^2+y^2}\right\}dx$$

$$m\pi = A\int_{-m}^{+m} y\,dx + \int_{-m}^{+m} x\left\{\frac{-y+\frac{dy}{dx}(m+x)}{(m+x)^2+y^2}+\right.$$

$$\left.\frac{y+\frac{dy}{dx}(m-x)}{(m-x)^2+y^2}\right\}dx - A\int_{-m}^{+m} x\frac{dy}{dx}\,dx$$

$$= 2A\int_{-m}^{+m} y\,dx + \left[x\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{m+x}+\operatorname{arctg}\frac{y}{m-x}\right)\right]_{-m}^{+m}$$

$$-\int_{-m}^{+m}\operatorname{arctg}\frac{y}{m+x}+\operatorname{arctg}\frac{y}{m-x} - A\,[x\,y]_{-m}^{+m}$$

$$2AJ = \mathfrak{A}.$$

Wenn also m die Bedingung (1) erfüllt, dann haben wir wieder den Satz:

Die Gesamtanziehung, die eine Masse auf zwei Punkte ausübt, ist beim Körper grösster Anziehung in der Ebene ebensogross, wie die der zweifachen, irgendwie auf der Begrenzung verteilten Masse.

Behandeln wir zunächst jedoch unsere Gleichung ohne die Bedingung (1). Die Gleichung der Begrenzung war:

$$\frac{m+x}{(m+x)^2+y^2}+\frac{m-x}{(m-x)^2+y^2} = A,$$

die sich umformen lässt in:

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\left[2m\left(m-\frac{1}{A}\right)\right] = m^3\left(\frac{2}{A}-m\right).$$

Das ist aber die Gleichung der Kassinischen Kurven.[1]) Wir haben damit eine neue schöne Eigenschaft der schon öfter untersuchten Kurven.

Wir untersuchen das Verhalten dieser Kurven für verschiedene A.

Ist zunächst A gross, dann zerfällt die Kurve in zwei diesmal symmetrisch gleiche Teile. Für $y=0$ ist

$$x=\pm m;\; x=\pm\sqrt{m\left(m-\frac{2}{A}\right)}.$$

1) Vgl. Loria: Spezielle Kurven, S. 194.

Zunächst gehen also alle Begrenzungskurven immer durch die Punkte $x = \pm m$, $y = 0$. In zwei Teile zerfällt die Kurve, solange $m > \frac{2}{A}$ oder $A > \frac{2}{m}$ ist. Für $A = \frac{2}{m}$ wird die Kurve die gewöhnliche Lemniskate. Wird die Masse grösser, A also kleiner, so erhalten wir eine Kurve, die für $A = \frac{3}{2m}$ die Geraden $y = \pm \sqrt{m\left(\frac{2}{A} - m\right)} = \pm \frac{m}{\sqrt{3}}$ zu Undulationstangenten hat. Weiter für $A = \frac{1}{m}$ degeneriert die Kurve zu einem Kreis. Wächst die Masse weiter, so werden bei $A = \frac{1}{2m}$ die Geraden $x = \pm m$ Undulationstangenten, die bei noch grösserer Masse die Kurven schneiden in Punkten mit den Koordinaten

$$x = \pm m, \; y = \pm \sqrt{2m\left(\frac{1}{A} - 2m\right)}.$$

Für unendlich grosse Masse, also für $A = 0$ erhalten wir die gleichseitige Hyperbel

$$x^2 - y^2 = m^2.$$

Analog dem § 10 lassen sich unsere Kurven auch konstruieren. Man erhält so auch eine elegante Konstruktion der Kassinischen Kurven:

Man setze

$$\frac{x + m}{(m + x)^2 + y^2} = \frac{1}{2 r_1}, \; \frac{m - x}{(x - m)^2 + y^2} = \frac{1}{2 r_2}, \text{ so ist}$$

$$A = \frac{1}{2 r_1} + \frac{1}{2 r_2}.$$

Man beschreibe mit beliebigem Radius r_1 einen Kreis, der durch M_1 geht und dessen Zentrum auf der Geraden $M_1 M_2$ liegt, bestimme den zugehörigen Radius r_2 so, dass $2A = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ ist, und beschreibe mit r_2 analog einen Kreis, der durch M_2 geht. Die Schnittpunkte beider Kreise bilden zwei Punkte der Kassinischen Kurve.

Welche Kurve entspricht nun der Bedingung (1)? Der Kreis! Denn berechnen wir für den Kreis:

$$\mathfrak{A} = 2 \int_{-m}^{+m} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{m+x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{m-x} \right) d\,x.$$

Wir setzen $\frac{y}{m+x} = \operatorname{tg} u$, dann wird, da $x^2 + y^2 = m^2$ ist:

$$\int_{-m}^{+m} \operatorname{arctg} \frac{y}{m+x} = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} m \cdot u\, du \sin 2u =$$

$$-\left[m\, u \cos 2u\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2m \cdot \cos 2u\, du = \frac{m\,\pi}{2};$$ ebenso erhält man

$$\int_{-m}^{+m} \operatorname{arctg} \frac{y}{m-x}\, d\,x = \frac{m\,\pi}{2},$$ also schliesslich

$\mathfrak{A} = 2\, m\, \pi$, nun ist $J = m^2 \pi$, und für den Kreis $A = \frac{1}{m}$,

also wird $\mathfrak{A} = 2\, A\, J$ übergeben in: $2\, m\, \pi = 2 \frac{m^2 \pi}{m}$.

Der eigentliche Körper grösster Anziehung auf zwei Punkte in der Ebene ist der Kreis.

Kapitel II. Lösung für den Raum R_3.

§ 13. Aufstellung der Gleichung.

Problem: Gegeben eine homogene Masse der Grösse nach, und zwei Ellipsoide der Grösse und Lage nach. Welche Form und Lage ist der Masse zu geben, damit sie auf die Ellipsoide in gegebenen Richtungen maximale Anziehung ausübt?

Als x_1-Achse nehmen wir wieder die Verbindung der Mitten der Ellipsoide. Dann lauten die Gleichungen der Ellipsoide I bezw. II:

$$\frac{[(x_1+m)\alpha_1+x_2\beta_1+x_3\gamma_1]^2}{a^2}+\frac{[\alpha_1'(x_1+m)+\beta_1'x_2+\gamma_1'x_3]^2}{b^2}+$$
$$\frac{[\alpha_1''(x_1+m)+\beta_1''x_2+\gamma_1''x_3]^2}{c^2}=1;$$
$$\frac{[(x_1-m)\alpha_2+x_2\beta_2+x_3\gamma_2]^2}{a^2}+\frac{[\alpha_2'(x_1-m)+\beta_2'x_2+\gamma_2'x_3]^2}{b^2}+$$
$$\frac{[\alpha_2''(x_1-m)+\beta_2''x_2+\gamma_2''x_3]^2}{c^2}=1.$$

Ein beliebiger Punkt $X_1\,X_2\,X_3$ übt auf das Ellipsoid

$$\frac{X_1^2}{a^2}+\frac{X_2^2}{b^2}+\frac{X_3^2}{c^2}=1$$

in Richtung $\vartheta_1\,(\partial_1\,\partial_1'\,\partial_1'')$ die Anziehungskomponente

$$A_1=\partial_1\,Z_1^{(\lambda_1)}\,X_1+\partial_1'\,Z_2^{(\lambda_1)}\,X_2+\partial_1''\,Z_3^{(\lambda_1)}\,X_3$$

aus. Das ist auch die Anziehung auf das Ellipsoid I, wo zur Abkürzung

(1) $X_1=(x_1+m)\,\alpha_1+x_2\,\beta_1+x_3\,\gamma_1$; $X_2\ldots$; $X_3\ldots$ gesetzt sei; analog sei

(2) $X_1'=(x_1-m)\,\alpha_2+x_2\,\beta_2+x_3\,\gamma_2$; $X_2'\ldots$; $X_3'\ldots$ gesetzt. Dann übt derselbe Punkt $(x_1\;x_2\;x_3)$, wenn wir die Abkürzungen (2) einführen, auf das Ellipsoid II in Richtung $\vartheta_2\,(\partial_2\,\partial_2'\,\partial_2'')$ die Anziehung:

$$A_2=\partial_2\,Z_1^{(\lambda_2)}\,X_1'+\partial_2'\,X_2'\,Z_2^{(\lambda_2)}+\partial_2''\,X_3'\,Z_3^{(\lambda_2)}\ \text{aus.}$$

Soll der Punkt $(x_1\,x_2\,x_3)$ ein Punkt der Begrenzung sein, so ist nach § 1:

(I) $A_1+A_2=A$ die Gleichung der Begrenzungsfläche des Körpers grösster Anziehung. Die in A_1 und A_2 enthaltenen Parameter λ_1 und λ_2 sind für jeden Punkt definiert als grösste Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{X_1^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{X_2^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{X_3^2}{c^2+\lambda_1}=1\ \text{und}$$
$$\frac{X_1'^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{X_2'^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{X_3'^2}{c^2+\lambda_2}=1.$$

§ 14. Diskussion der Gleichung.

Analog dem § 10 reduzieren sich die 17 Parameter auf 12 von einander unabhängige.

Nach der mechanischen Bedeutung hört die Begrenzungsfläche auf den Ellipsoiden auf. Wir ersetzen aber die angezogenen Ellipsoide durch die unendlich dünnen Fokalellipsen $\lambda = -c^2$, sodass wir unsere Begrenzungsflächen bis zu diesen Fokalellipsen fortsetzen können.

Aus dem Maclaurinschen Satze folgt, dass wieder konfokale Ellipsoide den Körper so schneiden, dass das ausserhalb liegende Stück für diese Ellipsoide in den Richtungen ϑ_1 und ϑ_2 ein Körper grösster Anziehung ist.

Auch hier wächst A, wenn die Masse M abnimmt. Für $M = 0$ ist A ein Maximum. Für $M = \infty$ ist $A = 0$.

Unsere Begrenzungsfläche nimmt im allgemeinsten Fall bei variablem A nacheinander folgende Gestalten an: Sie ist für $A = A_{m_2}$ ein Punkt, dann eine Fläche an einem Ellipsoid ($A_{m_2} > A > A_{m_1}$), dann eine Fläche an dem einen, ein Punkt an dem andern Ellipsoid ($A = A_{m_1}$), dann zwei Flächen $A_{m_1} > A > A^*$; beide berühren sich bei $A = A^*$, bilden für $A^* > A > A'$ eine Sattelfläche; bei $A = A'$ lässt sich an einen Punkt der Kehlkurve eine Undulationstangentialebene legen, für $A' > A > A''$ verschwindet der Sattel weiter, bis für $A = A''$ sich an den letzten Punkt der Kehlkurve eine Undulationstangentialebene legen lässt. Nimmt A weiter ab, so wird für $A = \overline{A}'$ bis $A = \overline{A}''$ die eine Fokalellipse Undulationstangentialebene, für $A = \overline{A}'''$ bis $A = \overline{A}^{IV}$ wird ebenso die andere Fokalellipse Undulationsebene. Endlich für $A = 0$ wird die bisher geschlossene Fläche, (wenn die Fokalellipsen mit zur Begrenzung gerechnet werden), zu einer offenen, die sich erst im Unendlichen schliesst. — Natürlich können in bestimmten Fällen mehrere solche Grenzfälle zusammenfallen, sodass weniger Formen herauskommen.

Diese bestimmten Werte für A allgemein zu berechnen, ist nicht möglich. Wir wenden uns deshalb gleich zu Spezialfällen.

§ 15. Eigentlicher Körper grösster Anziehung (I. Spezialfall).

Sind von den Ellipsoiden blos die Mittelpunkte fest, so sind sie, um bei sonst variabler Lage das Maximum der Anziehung zu erfahren, nach § 4 wieder so zu drehen, dass ihre kleinsten Achsen in einer Geraden liegen und die Anziehungsrichtung ist längs der kleinsten Achsen zu nehmen. Die Gleichung der Begrenzung des Körpers grösster Anziehung für diese Lage der beiden Ellipsoide ist:

$$A = (x_1 + m)\, Z_3^{(\lambda_1)} - (x_1 - m)\, Z_3^{(\lambda_2)}$$

$$\frac{(x_1 + m)^2}{c^2 + \lambda_1} + \frac{x_2{}^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{x_3{}^2}{b^2 + \lambda_1} = 1.$$

$$\frac{(x_1 - m)^2}{c^2 + \lambda_2} + \frac{x_2{}^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{x_3{}^2}{b^2 + \lambda_2} = 1.$$

Der Körper liegt symmetrisch zu allen drei Achsen.

Zur näheren Untersuchung der Gestalt betrachten wir die Schnittkurven mit den Achsenebenen.

$x_1 = 0$. $A = 2\,m\, Z_3^{(\lambda)}$, daraus bestimmt sich ein λ, dann ist:

$$\frac{x_2{}^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_3{}^2}{b^2 + \lambda} = 1 - \frac{m^2}{c^2 + \lambda}$$

die Gleichung der Schnittkurve, also eine Ellipse; diese ist aber nur reell für $\lambda > m^2 - c^2$. Ist $\lambda = m^2 - c^2$ also:

$$A^* = 2\,m\, Z_3^{(m^2 - c^2)},$$

dann wird die Ellipse zum Punkt $x_2 = x_3 = 0$. Die Fläche hat für A^* eine Doppelspitze im Nullpunkt.

Schnitt mit der x_1-Achse: Da ist $x_2 = x_3 = 0$ zu setzen.

$$A = \sqrt{c^2 + \lambda_1}\, Z_3^{\lambda_1} + \left(2\,m - \sqrt{c^2 + \lambda_1}\right) Z_3^{[\lambda_2 = (2\,m - \sqrt{c^2 + \lambda_1})^2 - c^2]}.$$

Diese Gleichung liefert ein λ; dann ist

$$x_1 = -\,m \pm \sqrt{c^2 + \lambda};$$

Da aber λ nie kleiner als $-c^2$ werden kann; erhalten wir als Maximalwert für A

$$A_{m_1} = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}} + 2\,m\,Z_3^{(4\,m^2 - c^2)} = A_{m_2}.$$

Die Maximalwerte sind gleich; bei unendlich kleiner Masse erhalten wir zwei Punkte, je einen an jedem Ellipsoid.

Dass die Schnittkurven die Achsen senkrecht schneiden, erkennt man sofort aus dem Bau der Gleichungen. Für die Winkel der Tangenten an den Fusspunkten mit der x_1-Achse in der $x_1\,x_2$-Ebene ergibt die Rechnung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = \Bigg[-\left(Z_1^{(\lambda_1)} + Z_2^{(\lambda_1)}\right) - Z_3^{(\lambda_2)} - \frac{4\,m^2}{\sqrt{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)^5}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x_1 - m}{c^2+\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a^2+\lambda_2}\right)^2}\Bigg] :$$

$$\Bigg[-\frac{2\,x_2}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\sqrt{1-\frac{x_2^2}{a^2-c^2}}} + \frac{2\,x_2 \cdot 4\,m^2}{\sqrt{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}\left[\left(\frac{x_1-m}{c^2+\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a^2+\lambda_2}\right)^2\right]}\Bigg].$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen endlich. Nur für $x_2^2 = a^2 - c^2$ wird er unbestimmt. Die Konstruktion lässt aber sofort erkennen, dass hier $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ wird. Dazu gehört ein

$$A'' = 2\,m\,Z_3^{(\lambda_2)},$$

wo λ_2 bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{4\,m^2}{c^2+\lambda_2} + \frac{a^2-c^2}{a^2+\lambda_2} = 1.$$

Analog findet man, dass auch für die Schnittkurven der $x_1\,x_3$-Ebene $\operatorname{tg}\varphi$ im allgemeinen endlich ist, nur für $x_3^2 = b^2 - c^2$ wird $\operatorname{tg}\varphi = \infty$. Dazu gehört

$$A''' = 2\,m\,Z_3^{(\lambda_3)},$$

wo λ_3 jetzt durch die Gleichung

$$\frac{4\,m^2}{c^2+\lambda_2}+\frac{b^2-c^2}{a^2+\lambda_2}=1$$

bestimmt wird. Für die Fläche selbst erkennt man hieraus, dass, da $A''' > A''$ ist, für $A = A'''$ $x_1 = \pm m$. Undulationstangentialebenen werden; für $A = A''$ sind $x_1 = \pm m$ immer noch Undulatiostangentialebenen, schneiden aber zugleich die Fläche noch einmal in den Ellipsen mit den Gleichungen:

$$\frac{x_2{}^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{x_3{}^2}{b^2+\lambda_2}=1-\frac{4\,m^2}{c^2+\lambda_2},\; x_1=\pm m.$$

Bilden wir endlich die Gleichung der Fusspunktskurve:

$$[A-2\,m\,Z_3{}^{(\lambda_2)}]\,\frac{\sqrt{(a^2-c^2)\,(b^2-c^2)}}{2}=$$

$$\pm\sqrt{1-\frac{x_2{}^2}{a^2-c^2}-\frac{x_3{}^2}{b^2-c^2}},$$

wo λ_2 bestimmt ist als grösste Wurzel der Gleichung:

$$\frac{4\,m^2}{c^2+\lambda_2}+\frac{x_2{}^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{x_3{}^2}{b^2+\lambda_2}=1.$$

Berechnet man die Kurve, so erkennt man, dass λ_2 sich sehr wenig ändert, die Kurve nahe eine Ellipse wird. Für $A > A'''$ liegt diese ganz innerhalb der Fokalellipse (Fig. I); für $A = A'''$ berührt sie diese in den Endpunkten der kleinen Achse der Fokalellipse (Fig. II). Für $A''' > A > A''$ berührt sie die Fokalellipse in 4 Punkten, ausserdem setzt sich von diesen Punkten für $\lambda_1 \neq -c^2$ die andere Schnittellipse mit der Ebene $x = -m$ an (Fig. III). Weiter ist für den ---- gezeichneten Teil die Wurzel negativ zu nehmen, da hier $x_1 + m$ von negativen Werten zu 0 übergeht. Für $A = A''$ berührt die Randkurve die Fokalellipse in den Endpunkten der grossen Achse (Fig. IV), jetzt gilt immer das — Zeichen. Ist $A < A''$, so trifft die Randkurve die Fokalellipse gar nicht mehr (Fig. V).

Fig. I.

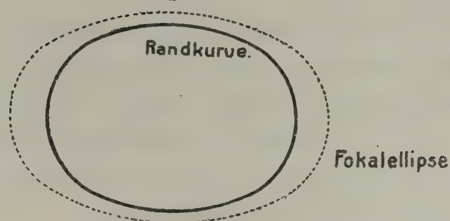


Fig. II.

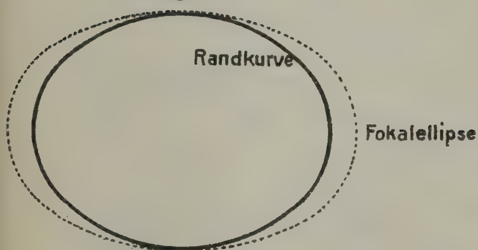


Fig. III.

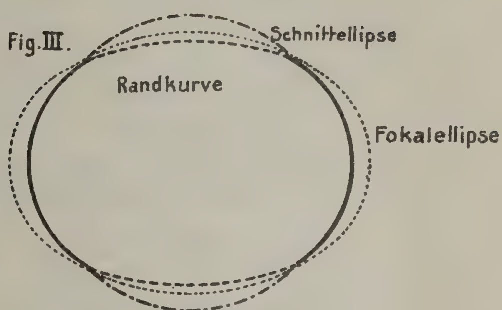


Fig. IV.

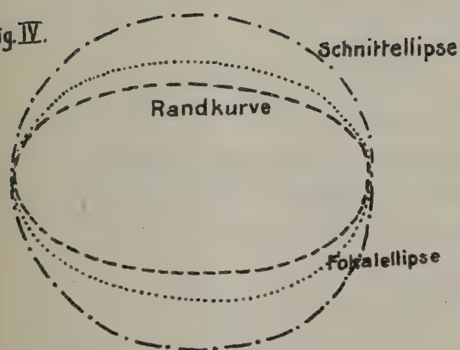
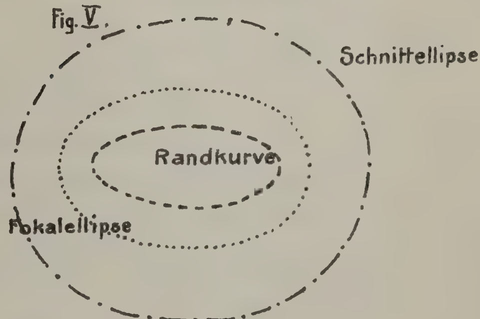


Fig. V.



§ 16. II. Spezialfall.

Auch wenn die grössten, oder sonst zwei Achsen der Ellipsoide in einer Geraden liegen, ist die günstigste Anziehungsrichtung bekannt, es ist nämlich die Richtung dieser Geraden. Behandeln wir den zuerst genannten Fall, so ist die Gleichung der Begrenzung:

$$A = (x_1 + m)\, Z_1^{(\lambda_1)} - (x_1 - m)\, Z_1^{(\lambda_2)};$$

$$\frac{(x_1 + m)^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda_1} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda_1} = 1;$$

$$\frac{(x_1 - m)^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda_2} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda_2} = 1.$$

Die Diskussion ist analog der des vorigen Paragraphen. Neues bietet nur das Verhalten der Fläche für $\lambda = - c^2$. Die Fusspunktskurve hat die Gleichungen:

$$A = (x_1 + m)\, Z_1^{(-c^2)} - (x_1 - m)\, Z_2^{(\lambda_2)}; \quad \frac{(x_1 - m)^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda_2} = 1.$$

Die Konstruktion ergibt nun, dass man λ_2 als nahe konstant ansehen kann. Die Fusspunktskurve ist dann nahezu eine Parallele zur x_2-Achse. Unsere Fläche endigt auf den Fokalellipsen mit je einer Kante. Die beiden Schnittpunkte einer Kante mit der Fokalellipse bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\frac{(x_1 + m)^2}{a^2 - c^2} + \frac{x_2^2}{b^2 - c^2} = 1; \qquad \frac{(x_1 - m)^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda_2} = 1;$$

$$A = (x_1 + m)\, Z_1^{(-c^2)} + (m - x_1)\, Z_2^{(\lambda_2)}.$$

Dass es wirklich eine Kante ist, ersieht man aus dem Verhalten des Schnittes mit der $x_1\, x_3$-Ebene. Die Richtung der Tangente in den Fusspunkten ist da nämlich:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \left(Z_1^{(\lambda_1)} - Z_2^{(\lambda_2)} + \frac{2}{\sqrt{(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)}} \right) : \left(\frac{x_1 + m}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} (b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x_1 + m)^2}{a^2 - c^2}}} \right).$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen endlich. Wegen des doppelten Vorzeichens hat die Kurve hier eine Spitze, die Fläche also eine Kante. Nur für $x_1 = -m$ wird $\operatorname{tg}\varphi = \infty$; hier verschwindet die Kante, die Ebene $x_1 = -m$ ist Undulationstangentialebene. Hierzu gehört ein

$$A' = 2\,m\,Z_1^{(4\,m^2 - a^2)}.$$

Bei der Behandlung der übrigen Spezialfälle bleibt die Methode immer dieselbe. Auch die Form der Fläche bringt nichts neues. Auf den Fall $a = b = c$ gehe ich nur soweit ein, um nachzutragen, was von Sella, der dieses Problem ausführlich behandelt hat, anscheinend übersehen ist.

Sella[1]) findet als Gleichung der Begrenzung des Körpers grösster Anziehung auf die Punkte $(-1,0)$ und $(+1,0)$,

$$\frac{x+1}{[(x+1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-x}{[(1-x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} = \nu = \text{konst.}$$

Für variable ν zeichnet er dann die entstehenden Kurven. Dabei scheint er übersehen zu haben, dass für gewisse Werte ν die Kurven die Geraden $x = \pm 1$ schneiden, während es nach seiner Figur den Anschein hat, als ob sie sich nur immer enger und enger diesen Geraden anschmiegten. Als Schnittpunkt mit $x = +1$ erhält man nämlich

$$y = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{4}{\nu^2}} - 4}\,.$$

Das kann also reell sein, nämlich wenn $\nu < \frac{1}{4}$ ist. Da ν bis 0 abnimmt, wird dieser Wert sicher erreicht.

§ 17. Anfertigung von Zeichnungen für § 16 und § 17.

Um die Zeichnungen herzustellen, ist es wieder am besten, die Kurvenscharen

1) Rendiconti, 5, III. 94. Rom.

$$A = X_1 Z_1^{(\lambda)}, \quad \frac{X_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{X_2^2}{b^2 + \lambda} = 1 \text{ oder}$$

$$A = X_1 Z_3^{(\lambda)}, \quad \frac{X_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{X_3^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

rechnerisch zu bestimmen und unsere Kurven punktweise durch die Schnitte der Kurvenscharen zu bestimmen. Zur Anfertigung von Zeichnungen gilt es für einen bestimmten Fall möglichst viel Werte Z für verschiedene λ zu berechnen.

Zur numerischen Ausführung sind die elliptischen Integrale

$$Z_1^{(\lambda)} = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \text{ und}$$

$$Z_3^{(\lambda)} = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}$$

durch elliptische Funktionen, durch Reihen auszudrücken.

Man setze

$\lambda = f^2 \left(pu - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3 f^2}\right)$, wo f ein noch zu bestimmender konstanter Faktor ist; dann wird

$$a^2 + \lambda = f^2 (pu - e_1); \; b^2 + \lambda = f^2 (pu - e_2); \; c^2 + \lambda = f^2 (pu - e_3),$$

$$\text{wo } e_1 = \frac{2 a^2 + b^2 + c^2}{3 f^2}, \quad e_2 = \frac{a^2 - 2 b^2 + c^2}{3 f^2},$$

$$e_3 = \frac{a^2 + b^2 - 2 c^2}{3 f^2} \text{ ist.}$$

Damit folgt:

$$Z_1^{(\lambda)} = \int_u^0 \frac{-2\, du}{f^3 (pu - e_1)} = \frac{2}{f^3} \int_0^u \frac{p(u + \omega_1) - e_1}{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)} du =$$

$$\frac{2}{f^3} \cdot \frac{-\xi(u + \omega_1) + \xi(\omega_1) - e_1 u}{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)} = \frac{2 f}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \times$$

$$[-\xi(u + \omega_1) + \xi(\omega_1) - e_1 u];$$

analog:

$$Z_3^{(\lambda)} = \frac{2 f}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} [-\zeta(u + \omega_3) + \zeta(\omega_3) - e_1 u].$$

Wir wählen jetzt $f = a$ und $c = o$, betrachten also die Fokalellipse als gegebenes Ellipsoid. Dann wird:

$$e_1 = \frac{-2a^2 + b^2}{3a^2}, \quad e_2 = \frac{a^2 - 2b^2}{3a^2}, \quad e_3 = \frac{a^2 + b^2}{3a^2}, \quad e_3 - e_1 = 1,$$

$$e_2 - e_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e_3 - e_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$ Setzen wir $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varkappa^2$,

so ist $e_3 - e_1 = 1 \quad e_2 - e_1 = \varkappa^2 \quad e_3 - e_2 = \varkappa'^2 \quad \omega_3 = K.$

$$\omega_1 = i K'. \quad \omega_2 = -K - iK'.$$

Bekanntlich ist nun:

$$\zeta(u + \omega_1) = \frac{H'(u + iK')}{H(u + iK')} + \frac{\eta}{K}(u + iK') = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{i\pi}{2K}$$
$$+ \frac{\eta}{K}(u + iK'), \text{ also}$$

$$Z_1^{(\lambda)} = \frac{2}{a(a^2 - b^2)}\left[-\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\eta}{K}u - \frac{iK' - i\frac{\pi}{2}}{K} + \eta' - e_1 u\right] =$$
$$\frac{2}{a(a^2 - b^2)}\left[-\left(\frac{\eta}{K} + e_1\right)u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right] =$$
$$\frac{2}{a(a^2 - b^2)}\left[\frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)}u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right].$$

Ferner ist

$$-\zeta(u + \omega_3) + \zeta(\omega_3) - e_3 u = -\frac{H_1'(u)}{H_1(u)} - \frac{\eta}{K}(u + K) + \eta - e_3 u$$
$$= \frac{H_1''(o)}{H_1(o)}u - \frac{H_1'(u)}{H_1(u)}.$$

Also

$$Z_3^{(\lambda)} = \frac{2}{a b^2}\left[\frac{H_1''(o)}{H_1(o)}u - \frac{H_1'(u)}{H_1(u)}\right].$$

Für λ ergibt sich:

$$\lambda = a^2 p u - \frac{a^2 + b^2}{3} = a^2 \frac{d}{du}\left(-\frac{H'(u)}{H(u)} - \frac{\eta}{K}u\right) - \frac{a^2 + b^2}{3} =$$
$$\frac{a^2}{3}\frac{H'''(o)}{H'(o)} - \frac{a^2 + b^2}{3} - a^2 \frac{d}{du}\left(\frac{H'(u)}{H(u)}\right).$$

Zur numerischen Berechnung wählen wir $a^2 = 4$; $b^2 = 2$. Dann ist $e_1 = -\frac{1}{2}$; $e_2 = 0$; $e_3 = \frac{1}{2}$; $\varkappa^2 = \frac{1}{2}$; $\varkappa'^2 = \frac{1}{2}$; $K = K' = \omega_3$; $q = e^{-\pi} = 0{,}043214$; $q^2 = 0{,}001867$; $q^3 = 0{,}000081$; $q^4 = 0{,}000003 \ldots \frac{\pi u}{2K} = x$. Dann ist angenähert:

$$\frac{H'(u)}{H(u)} = \frac{\pi}{2K}\left[\operatorname{ctg} x + 4(q^2 + q^4)\sin 2x + 4q^4 \sin 4x\right]$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{H'(u)}{H(u)}\right) = \frac{\pi^2}{4K^2}\left[-\frac{1}{\sin^2 x} + 0{,}014968\cos 2x + 0{,}000056\cos 4x\right].$$

$$\frac{H'''(0)}{H'(0)} = -\frac{\pi^2}{4K^2}\left[1 - 8(q^2 + 3q^4)\right];$$

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = -\frac{\pi^2}{4K^2} 8(q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4).$$

$$\frac{H_1''(0)}{H_1(0)} = -\frac{\pi^2}{4K^2}(1 + 8q^2 - 8q^4)$$

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = 4\frac{\pi}{2K}\left[(q+q^3)\sin 2x + q^2 \sin 4x + q^3 \sin 6x + q^4 \sin 8x\right].$$

$$\frac{H_1(u)}{H_1(u)} = -4\frac{\pi}{2K}\left[\frac{1}{4}\operatorname{tg} x + (q^2 + q^4)\sin 2x - q^4 \sin 4x\right].$$

Schliesslich wird:

$$\lambda = -0{,}0428 + 2{,}8715\operatorname{ctg}^2 x - 0{,}04297\cos 2x - 0{,}00016\cos 4x.$$

Hieraus interpoliert man am besten für die einzelnen λ die Werte der Grössen x. Mit Benutzung der gefundenen Ausdrücke erhält man:

$$Z_1^{(\lambda)} = 0{,}16065\,x - 0{,}07354\sin 2x - 0{,}00323\sin 4x,$$
$$Z_3^{(\lambda)} = 0{,}4234\operatorname{tg} x + 0{,}00317\sin 2x - 0{,}4293\,x.$$

Kapitel III. Lösung für den R_n.

§ 18. Eigentlicher Körper grösster Anziehung.

Durch einfache Erweiterung der Methode liesse sich für den R_n dasselbe wie im vorigen Kapitel für den R_3 ableiten. Die Behandlung bietet nichts Neues. Als eigentlichen Körper grösster Anziehung zweier E_n findet man eine Masse, begrenzt durch einen R_{n-1} mit den Gleichungen:

$$A = Z_n^{(\lambda_1)}(x_n + m) - (x_n - m) Z_n^{(\lambda_2)},$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_1} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_1} + \ldots \frac{x^2_{n-1}}{a^2_{n-1} + \lambda_1} + \frac{(x_n + m)^2}{a_n^2 + \lambda_1} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_2} + \ldots \frac{x^2_{n-1}}{a^2_{n-1} + \lambda_2} + \frac{(x_n - m)^2}{a_n^2 + \lambda^2} = 1,$$

indem wieder nach § 4 die Ellipsoide E_n bei festen Mittelpunkten so zu drehen sind, wie obige Gleichungen es angeben, dass also die kleinsten Achsen in einer Geraden liegen.

§ 19. Körper grösster Anziehung auf zwei K_n.

Besonderes Interesse bietet der Spezialfall $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Die E_n werden zu „Kugeln" K_n.

Die Gleichung der Begrenzung wird:

$$\frac{x_n + m}{[x_1^2 + x_2^2 + \ldots x^2_{n-1} + (x_n + m)^2]^{\frac{n}{2}}} - \frac{x_n - m}{[x_1^2 + x_2^2 + \ldots x^2_{n-1} + (x_n - m)^2]^{\frac{n}{2}}} = A.$$

Man sieht, der Körper ist ein „Rotationskörper" um die x_n-Achse, der auch zu dieser Achse symmetrisch liegt. Wir brauchen deshalb nur einen beliebigen Meridianschnitt mit der Gleichung:

$$\frac{x_n + m}{[x_k^2 + (x_n + m)^2]^{\frac{n}{2}}} - \frac{x_n - m}{[x_k^2 + (x_n - m)^2]^{\frac{n}{2}}} = A$$

näher zu diskutieren.

Schnittpunkte mit der x_n-Achse. $x_k = 0$. $x_n = \pm m$ oder (1) $(x_n - m)^{n-1} - (x_n + m)^{n-1} = A(x_n^2 - m^2)^{n-1}$.

Schnittpunkte mit der x_k-Achse. $x_n = 0$.

$$x_k = \pm \sqrt{\sqrt[n]{\frac{4\,m^2}{A^2}} - m^2};$$

das ist reell nur für $A < \frac{2}{m^{n-1}}$. Ist $A > \frac{2}{m^{n-1}}$, so liefert (1) noch eine reelle Wurzel x_n; dann zerfällt also die Kurve in zwei Stücke. Für $A = \frac{2}{m^{n-1}}$ erhalten wir eine lemniskatenähnliche Figur mit dem Knotenpunkt im Koordinatenanfang.

Schnitt mit $x_n = \pm m$.

$$x_k = \sqrt{\sqrt[n]{\frac{4\,m^2}{A^2}} - 4\,m^2};$$

das ist reell erst, wenn die Masse so gross wird, dass $A < \frac{1}{(2\,m)^{n-1}}$ ist. Für $A = \frac{1}{(2\,m)^{n-1}}$ sind die Geraden $x_n = \pm m$ Undulationstangenten. Im Grenzfall $A = 0$, also die Masse $M = \infty$, lautet die Gleichung:

$$(x_n + m)^2 [(x_n - m)^2 + x_k^2]^n = (x_n - m)^2 [(x_n + m)^2 + x_n^2]^n.$$

Das sind hyperbelähnliche Figuren, deren Asymptoten die Gleichungen:

$$y = \pm \sqrt{n-1} \cdot x$$

haben. Diese Geraden sind zugleich auch die Tangenten im Nullpunkt an die lemniskatenähnliche Figur mit dem Parameter $A = \frac{2}{m^{n-1}}$, denn die Rechnung ergibt auch $\frac{d\,y}{d\,x} = \pm \sqrt{n-1}$.

Für $n = \infty$ erkennt man, dass der Körper dann begrenzt wird von den Geraden $x_n = \pm m$.

Analytisch ist die Ableitung des Resultats die folgende: Der Körper ist Rotationskörper um die x_n-Achse. Eine

Elementarkugel K_{n-1} (Radius $\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + \ldots x^2_{n-1}}$) von der „Dicke“ $d\,x_n$ übt auf die beiden K_n die Anziehung aus:

$$d\,\mathfrak{A} = d\,x_n \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^{\varrho_1} \left(\frac{(x_n + m)\,\varrho^{n-2}}{(\sqrt{(x_n + m)^2 + \varrho^2})^n} - \right.$$

$$\left. \frac{(x_n - m)\,\varrho^{n-2}}{(\sqrt{(x_n - m)^2 + \varrho^2})^n} \right) d\,\varrho.$$

$$\mathfrak{A} = \int_{-m}^{+m} d\,x_n \int_0^{\varrho_1} \varrho^{n-2} \left\{ \frac{x_n + m}{[(x_n + m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} - \frac{x_n - m}{[(x_n - m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} \right\} \times$$

$$d\,\varrho \cdot \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Der Inhalt des Körpers ist

$$J = \int_{-m}^{+m} \frac{\varrho_1^{\,n-1}}{n-1}\, d\,x_n \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Setzen wir

$$F = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \left[\int_0^{\varrho} \left(\frac{x_n + m}{[(x_n + m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} - \frac{x_n - m}{[(x_n - m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} \right) \right.$$

$$\left. \varrho^{n-2}\, d\,\varrho - \frac{\mu}{n-1}\, \varrho_1^{\,n-1} \right],$$

so ist die Bedingung, dass $\mathfrak{A}$ ein Maximum, J konstant bleiben soll:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{d}{d\,x_n}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho'}\right) = 0; \text{ dies gibt:}$$

$$\frac{x_n + m}{[(x_n + m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} - \frac{x_n - m}{[(x_n - m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} = \mu = \text{konst.} = A.$$

Für ϱ^2 setze man seinen Wert $\varrho^2 = x_1^2 + \ldots x^2_{n-1}$ ein, dann erhält man wie oben

$$\frac{x_n + m}{[x_1^2 + \ldots x^2_{n-1} + (x_n + m)^2]^{\frac{n}{2}}} - \frac{x_n - m}{[x_1^2 + \ldots x^2_{n-1} + (x_n - m)^2]^{\frac{n}{2}}} = A.$$

Soll wieder auch das m variieren, so kommt hinzu die Bedingung

$$F(x_n = m) + F(x_n = -m) + \int_{-m}^{+m} \frac{\partial F}{\partial m} dx = 0.$$

Durch verschiedene längere Umformungen erhält man hieraus

$$F(x_n = m) + F(x_n = -m) = \int_{-m}^{+m} \left(\frac{\varrho^{n-1}}{[(m + x_n)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varrho^{n-1}}{[(m - x_n)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} \right) d x_n$$

$$m F(m) + m F(-m) = A \int_{-m}^{+m} \varrho^{n-1} d x_n +$$

$$\int_{-m}^{+m} x_n \left\{ \frac{-\varrho^{n-1} + (m + x) \frac{d \varrho}{d x_n}}{[(m + x_n)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varrho^{n-1} + (m - x) \frac{d \varrho}{d x_n}}{[(m - x_n)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} - A \int_{-m}^{+m} \varrho^{n-2} \frac{d \varrho}{d x_n} d x_n \right\}.$$

$$0 = A \frac{n}{n-1} \int_{-m}^{+m} \varrho^{n-1} d x_n - \int_{-m}^{+m} d x_n \int_0^{\varrho_1} \varrho^{n-2} \left(\frac{x_n + m}{[(x_n + m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} + \frac{m - x_n}{[(x_n - m)^2 + \varrho^2]^{\frac{n}{2}}} \right) d \varrho.$$

$$n A J = \mathfrak{A};$$

d. h. der von Sella ausgesprochene Satz für den R_3 gilt allgemein:

Die Gesamtanziehung des Körpers grösster Anziehung im R_n auf zwei Punkte ist ebensogross wie die Anziehung der n-fachen, irgend wie über die Begrenzung verteilten Masse.

Anhang.

§ 20. Ausdehnung des Problems auf k E_n.

Die Resultate lassen sich mit den benutzten Methoden sofort erweitern auf k E_n. Absolutes Maximum der Anziehung bewirkt die Masse, wenn die Mittelpunkte der E_n in allen Ecken eines regelmässigen Körpers[1]) liegen und die kleinsten Achsen in Richtung der Kugelradien der Kugel K_k, die um den regelmässigen Körper beschrieben ist; die maximale Anziehung erhält man natürlich in Richtung dieser kleinsten Achsen.

Sind statt der E_n Kugeln K_n oder Punkte gegeben, so gilt für diese ebenfalls der Sellasche Satz.

Der Beweis hierfür sei nur für das spezielle Beispiel $k = 4$, $n = 2$ geführt:

Die angezogenen Punkte haben die Koordinaten: $+m, 0; 0, +m; -m, 0; 0, -m$. Dann ist

$$A = 2\int_{-m}^{+m} dx \int_{0}^{+y} \left[\frac{m+x}{(m+x)^2+y^2} + \frac{m-x}{(m-x)^2+y^2} + \frac{m+y}{(m+y)^2+x^2} + \frac{m-y}{(m-y)^2+x^2} \right] dy.$$

$$= 2\int_{-m}^{+m} dx \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{m+x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{m+x} + \tfrac{1}{2} \lg \frac{(m+y)^2+x^2}{(m-y)^2+x^2} \right).$$

---

1) Dieser regelmässige Körper kann natürlich auch weniger als n-Dimensionen haben, z. B. ein Quadrat im Raum.

$$J = 2 \int_{-m}^{+m} y \, d\, x.$$

Setzen wir wieder

$$F = \operatorname{arctg} \frac{y}{m + x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{m - x} + \tfrac{1}{2} \lg \frac{(m + y)^2 + x^2}{(m - y)^2 + x^2} - \mu y;$$

so sind die Bedingungen des Maximums:

$$\mu = A = \frac{m + x}{(m + x)^2 + y^2} + \frac{m - x}{(m - x)^2 + y^2} +$$

$$\frac{m + y}{(m + y)^2 + x^2} + \frac{m - y}{(m - y)^2 + x^2},$$

$$F(m) + F(-m) = \int_{-m}^{+m} d\, x \Big(\frac{y}{(m + x)^2 + y^2} + \frac{y}{(m - x)^2 + y^2}$$

$$- \frac{m + y}{(m + y)^2 + x^2} + \frac{m + y}{(m - y)^2 + x^2} \Big)$$

$$= A \int_{-m}^{+m} y \, d\, x + \int_{-m}^{+m} x \left\{ \frac{-y + (m + x) \frac{d\, y}{d\, x}}{(m + x)^2 + y^2} + \frac{y + (m - x) \frac{d\, y}{d\, x}}{(m - x)^2 + y^2} \right.$$

$$\left. - \frac{(m + y)^2 + (m + y) \frac{d\, y}{d\, x}}{(m + y)^2 + x^2} + \frac{(m - y)^2 + (m + y) \frac{d\, y}{d\, x}}{(m - y)^2 + x^2} \right\} d\, x$$

$$- A \int_{-m}^{+m} \frac{d\, y}{d\, x} \, d\, x.$$

$$0 = 2 A \int_{-m}^{+m} y \, d\, x - \int_{-m}^{+m} \int_{0}^{y} \Big[\frac{m + x}{(m + x)^2 + y^2} + \frac{m - x}{(m - x)^2 + y^2}$$

$$+ \frac{m + y}{(m + y)^2 + x^2} + \frac{m - y}{(m - y)^2 + x^2} \Big] d\, x \; d\, y.$$

$$\mathfrak{A} = 2 A J.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

In der Ebene ist die Anziehung des Körpers grösster Anziehung auf 4 Punkte ebenso gross wie die Anziehung der doppelten Masse, die beliebig auf der Begrenzung verteilt ist.

Speziell für die Ebene folgt hieraus weiter der Satz:

Eigentlicher Körper grösster Anziehung auf k Punkte der Ebene ist ein Kreis.

Beweis wieder für $k = 4$. Die Diskussion der Begrenzungsgleichung gibt: Die Kurve wird ein Kreis für $A = \frac{4}{2\,m}$.
Nun ist die Anziehung eines Kreises auf einen Punkt nach § 12 gleich $m\,\pi$. Also die Anziehung auf 4 Punkte:

$$4\,m\,\pi = 2 \cdot m^2\,\pi \cdot \frac{4}{2\,m};$$

damit ist der Satz bewiesen.

Die allgemeine Übertragung dieser Beweise ist leicht, da das Prinzip immer dasselbe bleibt, nur die Rechnung wird grösser.

Zum Schluss sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gutzmer, für die freundliche Anregung zu dieser Arbeit und Unterstützung bei der Ausführung meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Ich, Louis Fritz Karl Becker, evangelischer Konfession, wurde geboren am 31. Dezember 1888 in Ellrich als Sohn eines Lehrers. Vom 6.—11. Jahre besuchte ich die Volksschule meiner Vaterstadt, darauf, von meinem Vater vorbereitet, das Kgl. Realgymnasium zu Nordhausen, wo ich Ostern 1906 das Reifezeugnis erhielt. Ich wandte mich dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu, zunächst in Göttingen; vom 5. Semester dann in Halle, wo ich am 11. Juli 1910 das examen rigorosum bestand.

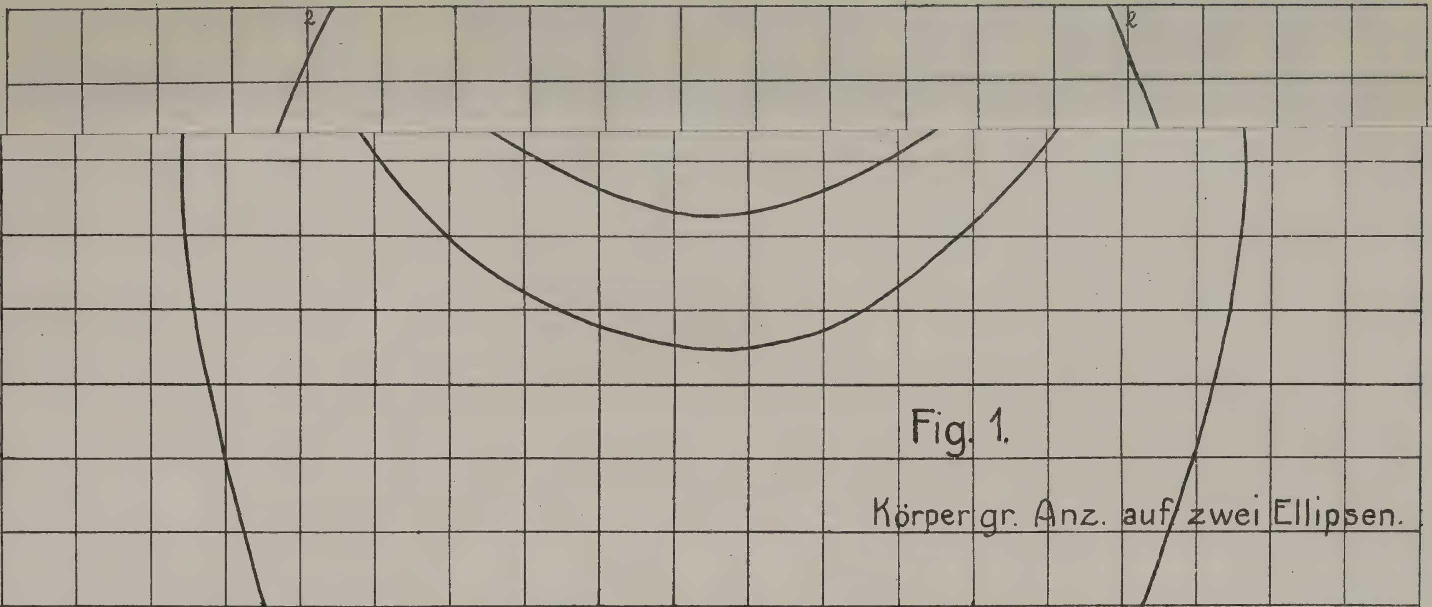


Fig. 1.

Körper gr. Anz. auf zwei Ellipsen.

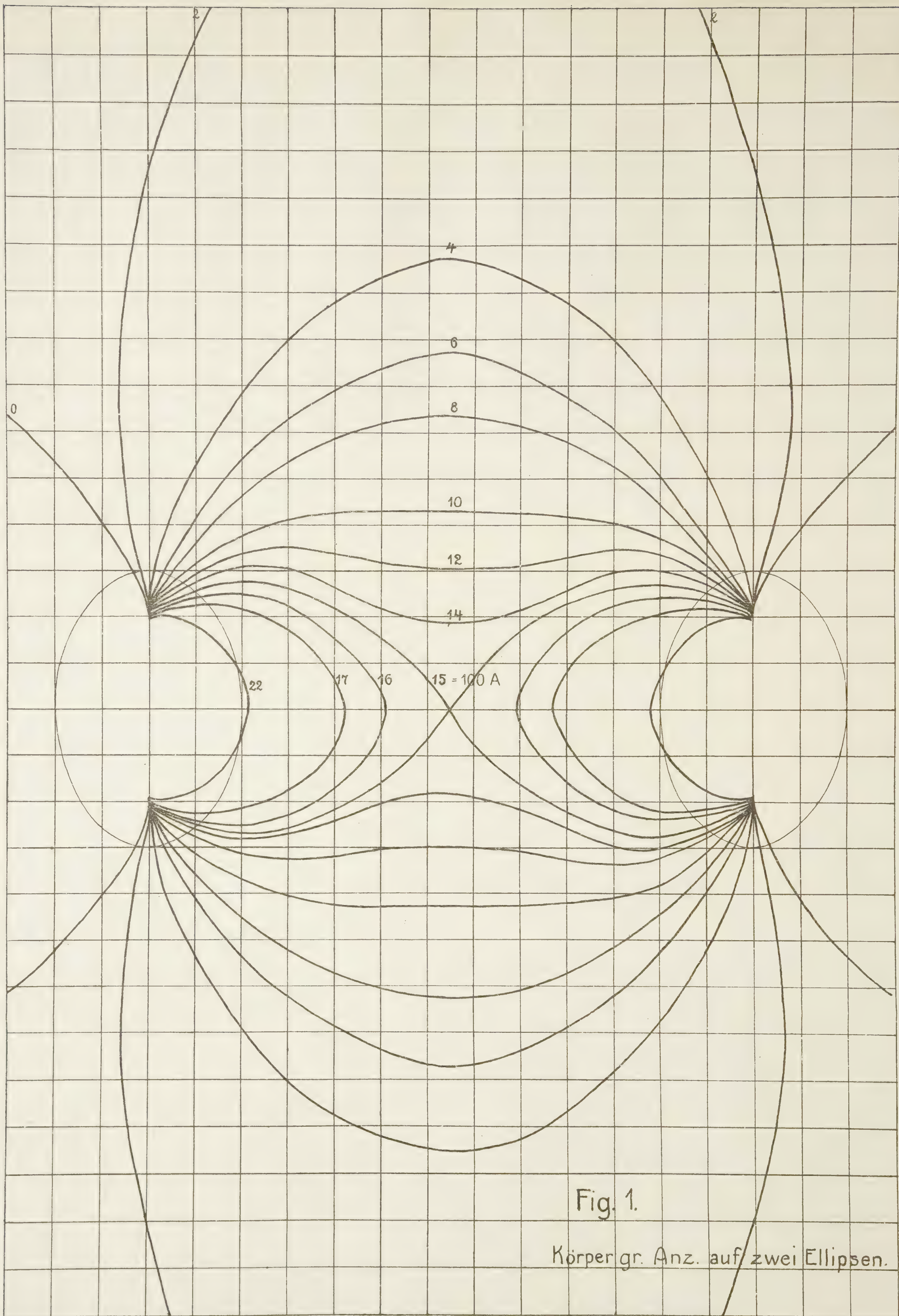


Fig. 1.

Körper gr. Anz. auf zwei Ellipsen.

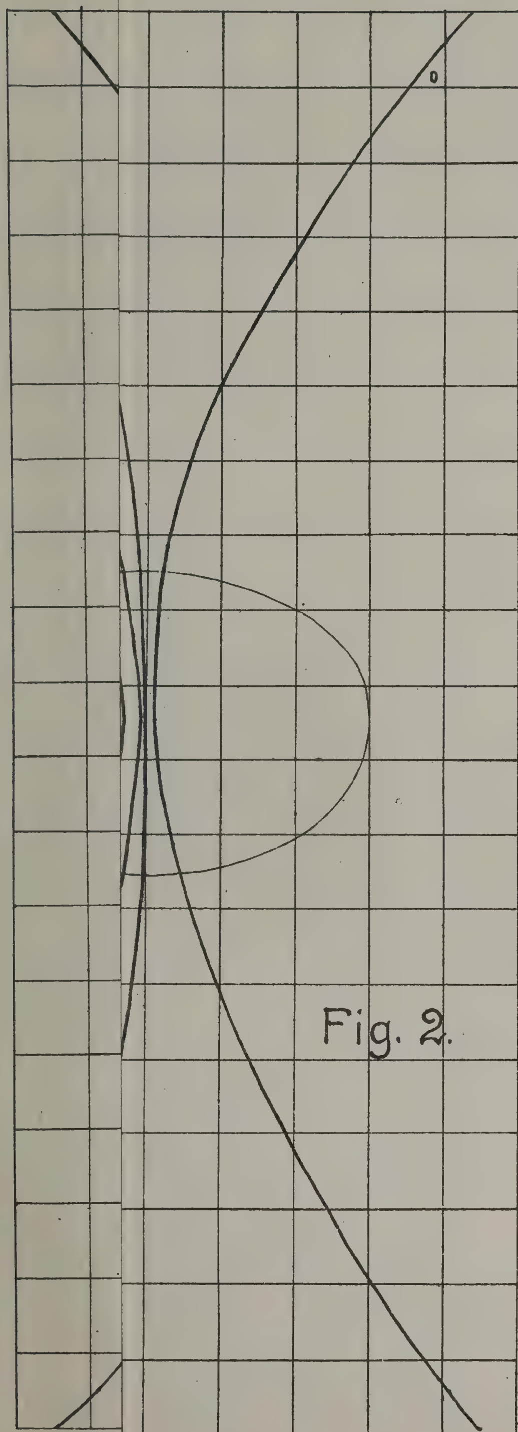


Fig. 2.

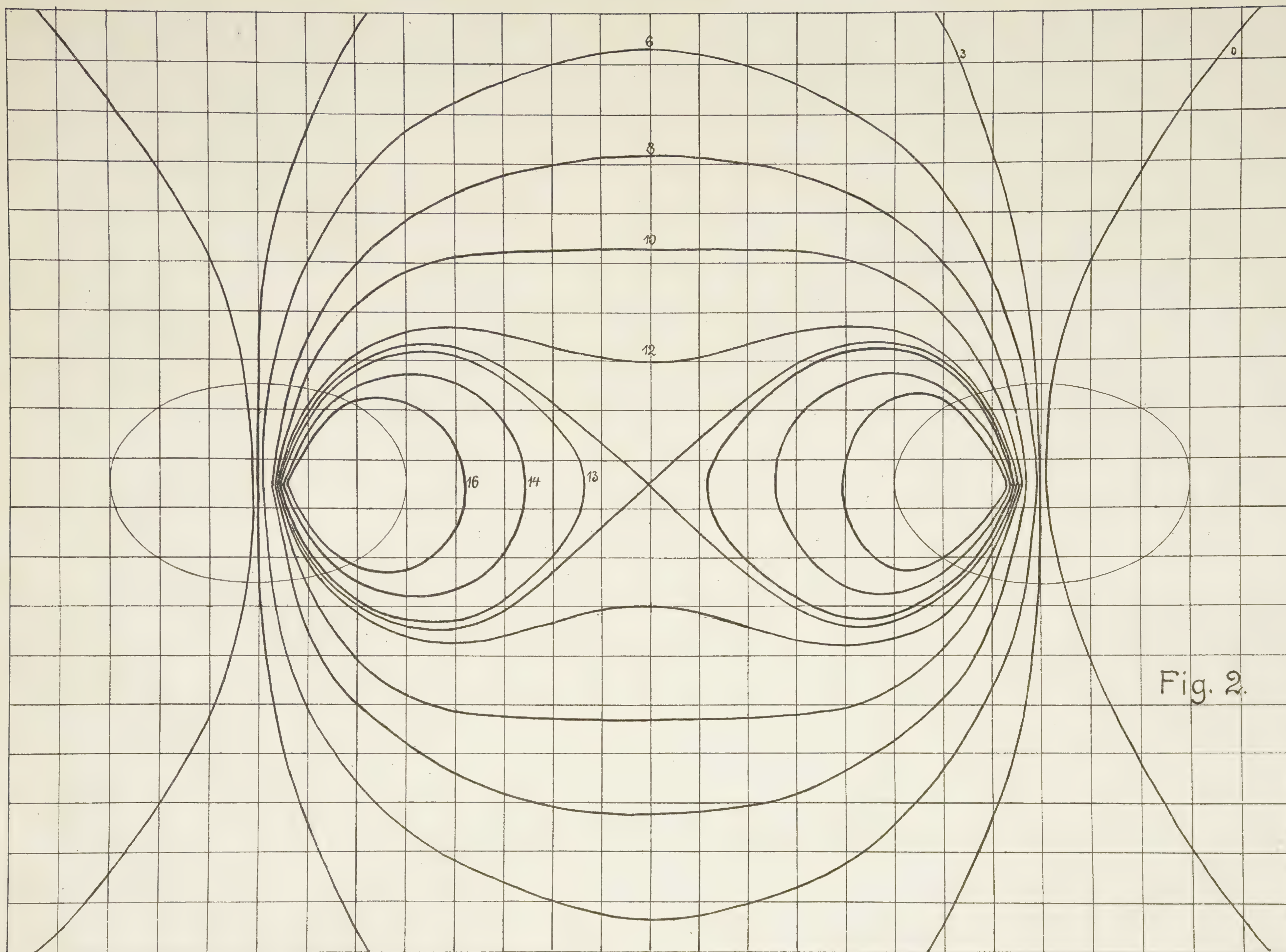


Fig. 2.

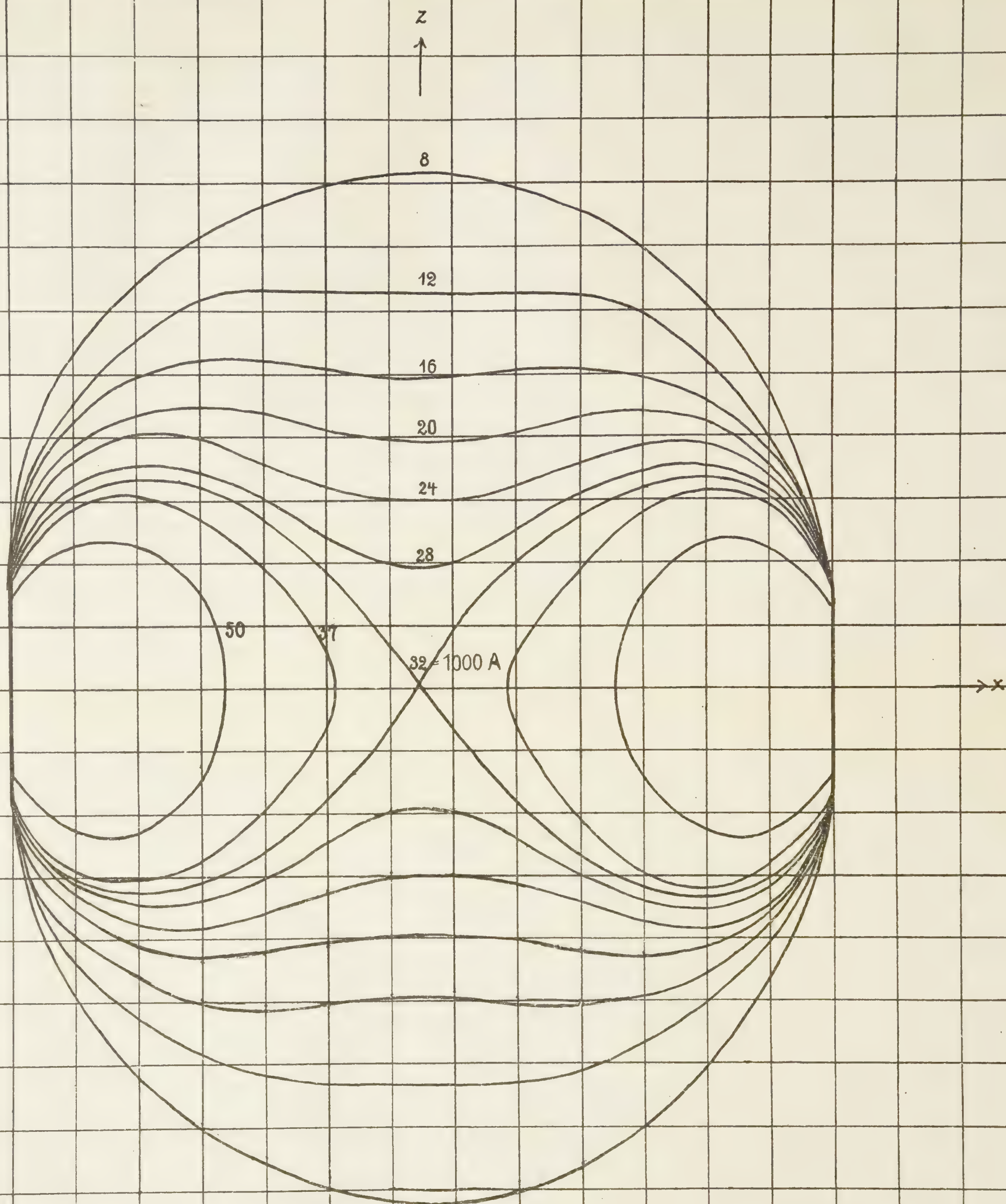


Fig. 3.

$$A = (x+m)\, Z_3^{(\lambda_1)} - (x-m)\, Z_3^{(\lambda_2)}$$

$$\frac{(x+m)^2}{\lambda_1} + \frac{z^2}{a^2+\lambda_1} = 1 = \frac{(x-m)^2}{\lambda_2} + \frac{z^2}{a^2+\lambda_2}$$

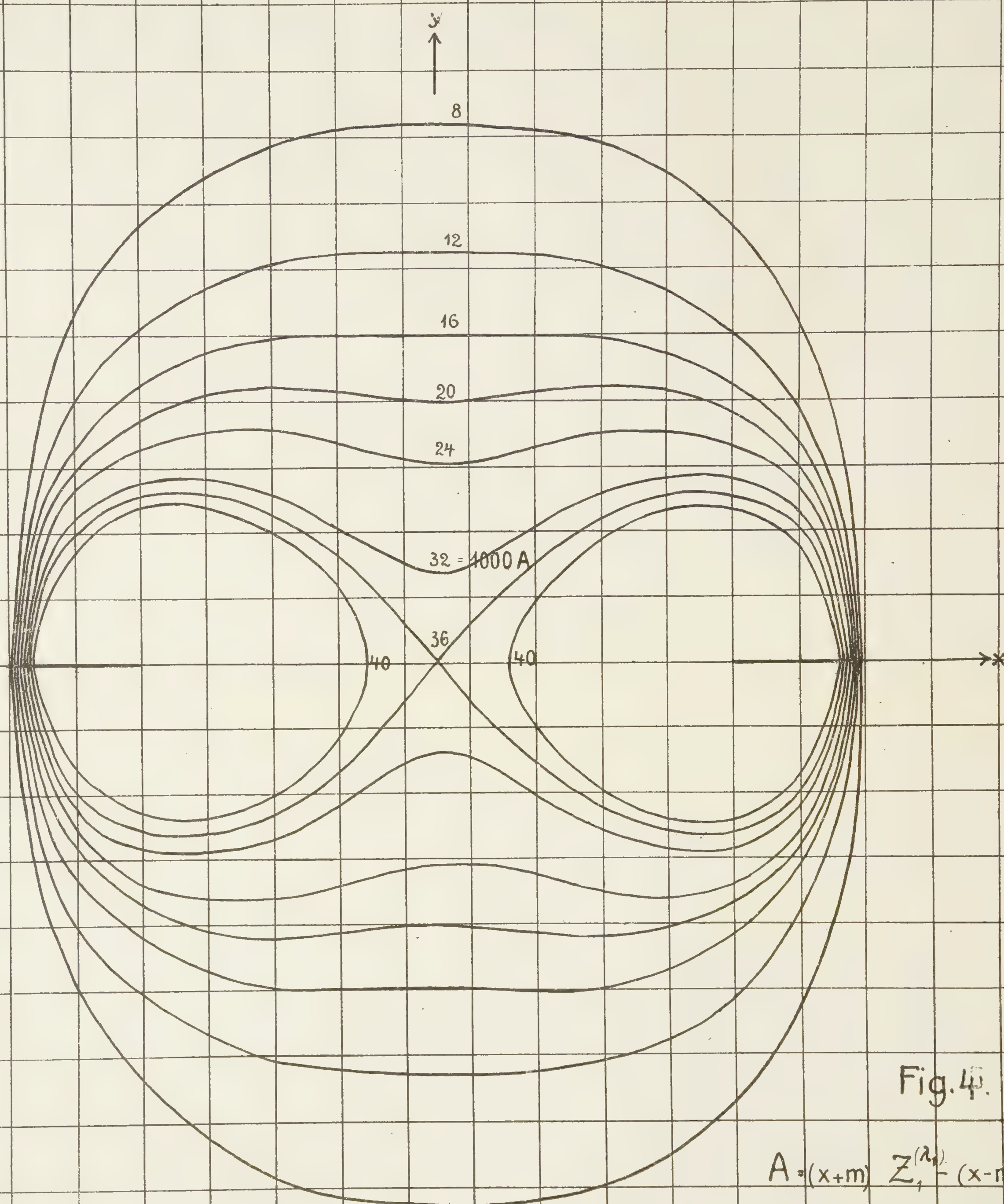


Fig. 4.

$$A = (x+m)\, Z_1^{(\lambda_1)} - (x-m)\, Z_1^{(\lambda_2)}$$

$$\frac{(x+m)^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{z^2}{\lambda_1} = 1 = \frac{(x-m)^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{z^2}{\lambda_2}$$

$y = 0$

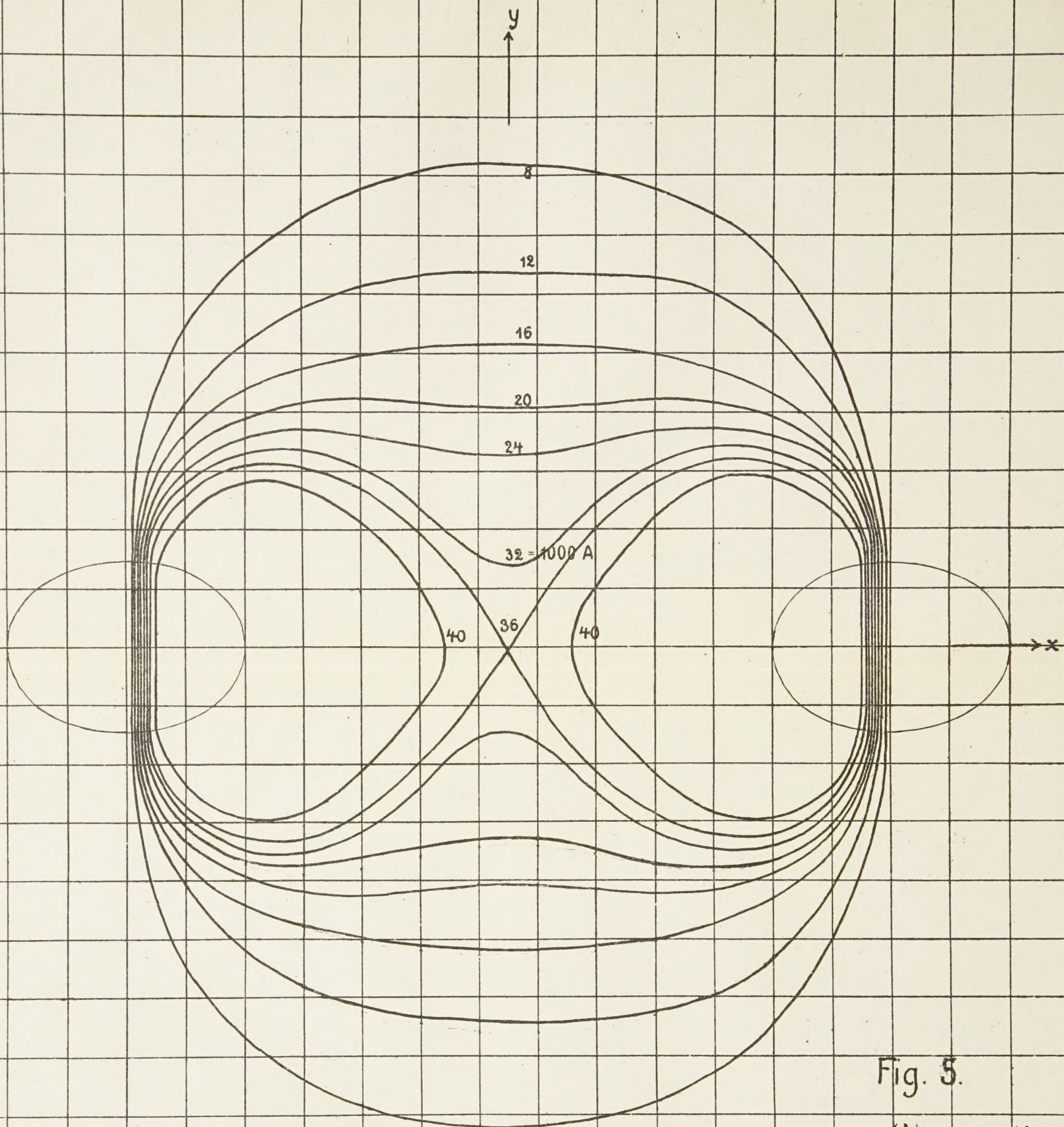

y
x
8
12
16
20
24
32 = 1000 A
36
40
40
$A = (x+m)\, Z_1^{(\lambda_1)} - (x-m)\, Z_1^{(\lambda_2)}$
$\frac{(x+m)^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} + \left(\frac{z}{\lambda_1}\right)^2 = 1 = \frac{(x-m^2)}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2}$

Fig. 5.

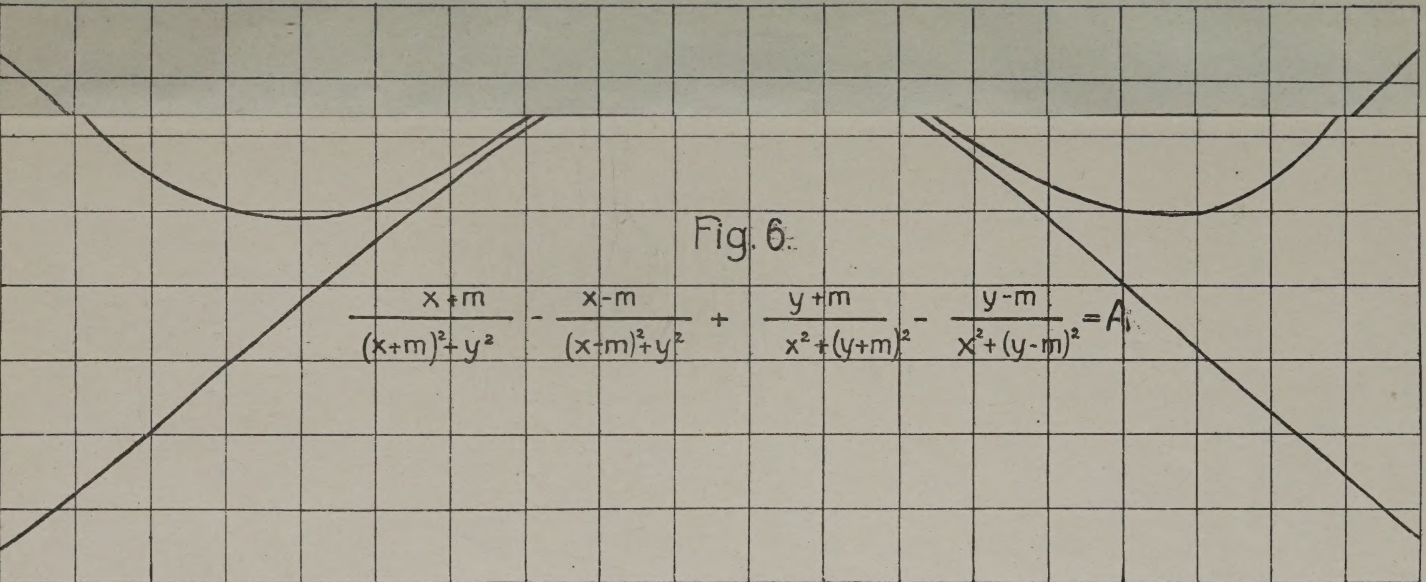


Fig. 6.
$\frac{x+m}{(x+m)^2+y^2} - \frac{x-m}{(x-m)^2+y^2} + \frac{y+m}{x^2+(y+m)^2} - \frac{y-m}{x^2+(y-m)^2} = A$

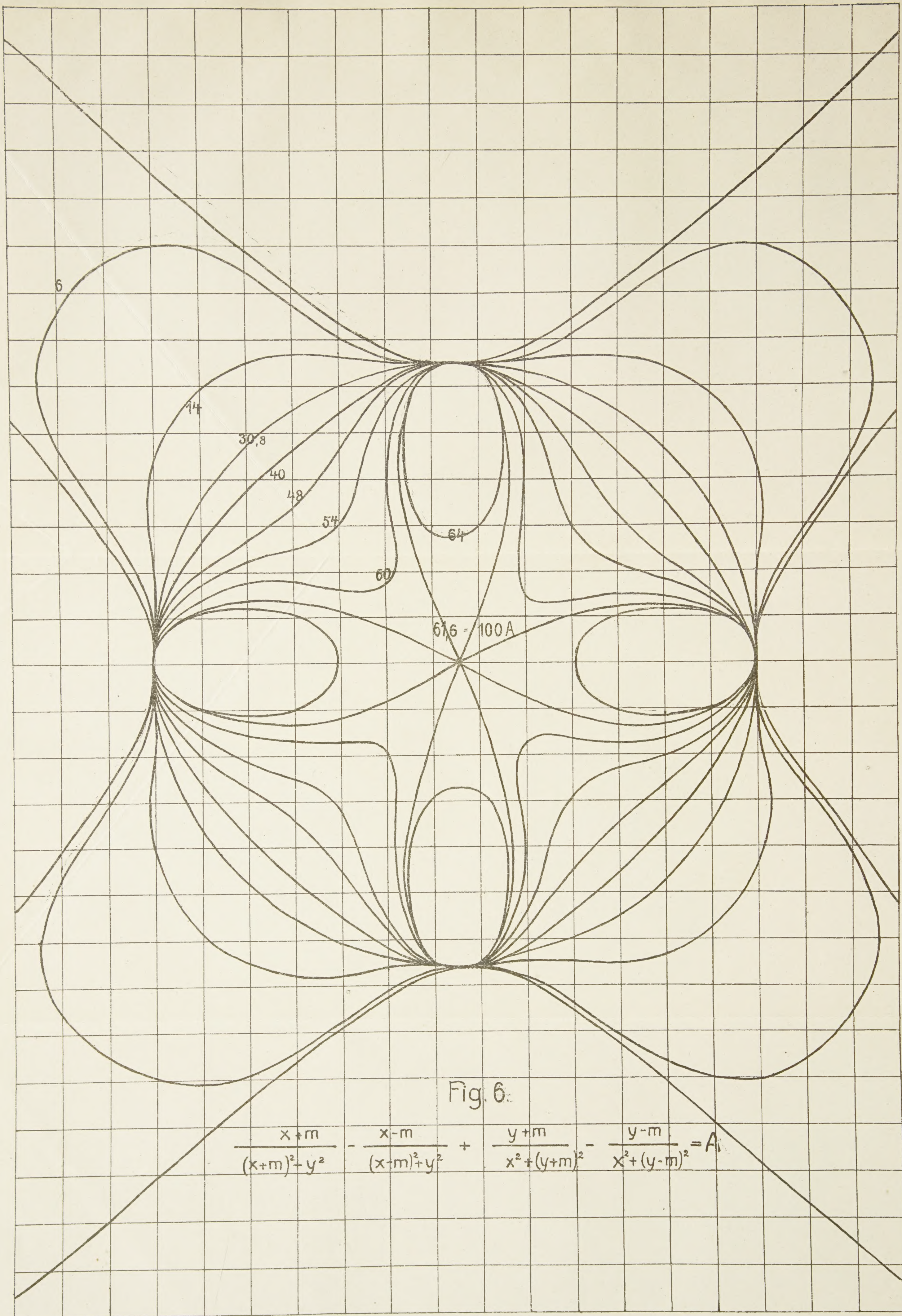


Fig. 6.

$$\frac{x+m}{(x+m)^2+y^2} - \frac{x-m}{(x-m)^2+y^2} + \frac{y+m}{x^2+(y+m)^2} - \frac{y-m}{x^2+(y-m)^2} = A$$